

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ФАКТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ЦЕЛИ

7.1. ОШИБКИ ЛИНИИ ПОЛОЖЕНИЯ

Выше неоднократно указывалось, что при измерении какой-либо геометрической величины, характеризующей местоположение цели, возникают систематические и случайные ошибки. Величины этих ошибок зависят от правильности учета реальных условий распространения радиоволн, величины отношения сигнал/помеха и, наконец, степени технического совершенства радиолокатора. Систематические ошибки в принципе могут быть устранены. Случайные ошибки, наоборот, устранены быть не могут. Поэтому измеренная геометрическая величина будет в общем случае отличаться от истинной, вследствие чего найденная линия положения не будет совпадать с истинной.

Расстояние между истинной и найденной линиями положения называется ошибкой линии положения.

Для определения зависимости ошибки линии положения от ошибки геометрической величины воспользуемся теорией скалярного поля.

Семейство линий положения можно рассматривать как линии уровня плоского скалярного поля геометрической величины U .

Из теории поля известно, что

$$|\text{grad } U| = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Заменяя дифференциалы конечными приращениями, получаем ошибку линии положения, равную

$$\Delta n = \frac{\Delta U}{|\text{grad } U|}, \quad (7.1)$$

где ΔU — ошибка геометрической величины.

Из формулы (7.1) следует, что ошибка линии положения прямо пропорциональна ошибке геометрической величины. Поэтому закон распределения ошибок линий положений будет таким же, как и ошибок геометрической величины. Ранее указывалось, что в подавляющем большинстве случаев закон распределения ошибок геометрической величины достаточно точно описывается нормальным законом распределения, который вполне характеризуется средней квадратической ошибкой.

Поэтому точность определения линии положения также вполне характеризуется средней квадратической ошибкой линии положения. Коэффициент пропорциональности между средней квадратической ошибкой линии положения и средней квадратической ошибкой геометрической величины зависит от вида линии положения и взаимного расположения искомой точки и фиксированных.

Линия положения постоянного пеленга (рис. 1.5 и 1.6) в декартовой системе координат описывается следующим уравнением:

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{x}{y}.$$

Модуль градиента в той же системе координат равен

$$|\text{grad } U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае

$$|\text{grad } \alpha| = \frac{1}{R},$$

где R — расстояние между искомой точкой и фиксированной.

Тогда согласно формуле (7.1) ошибка линии положения при пеленгации будет равна

$$\Delta n_n = R \Delta \alpha, \quad (7.2)$$

где $\Delta \alpha$ — ошибка пеленга в радианах.

Заменяя $\Delta \alpha$ средней квадратической ошибкой пеленга σ_α , найдем среднюю квадратическую ошибку линии положения при пеленгации как

$$\sigma_n = R \sigma_\alpha. \quad (7.3)$$

Линия положения постоянного расстояния (рис. 1.8) описывается уравнением

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$|\text{grad } R| = 1.$$

Тогда ошибка линии положения при дальнометрии будет равна

$$\Delta n_d = \Delta R, \quad (7.4)$$

где ΔR — дальномерная ошибка.

Соответственно, средняя квадратическая ошибка линии положения при дальнометрии будет равна

$$\sigma_d = \sigma_R, \quad (7.5)$$

где σ_R — средняя квадратическая ошибка дальности.

Гиперболическая линия положения (рис. 1.9) описывается уравнением

$$R_p = R_1 - R_2 = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2},$$

где d — база разностно-дальномерной системы.

Поэтому

$$|\text{grad } R_p| = \sqrt{2 \left(1 - \frac{x^2 + y^2 - \frac{d^2}{4}}{R_1 R_2}\right)}.$$

Из $\triangle AMB$ следует, что

$$\cos \varphi = \frac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{2R_1 R_2} = \frac{x^2 + y^2 - \frac{d^2}{4}}{R_1 R_2}.$$

Поэтому

$$|\text{grad } R_p| = \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} = 2 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Тогда ошибка гиперболической линии положения будет равна

$$\Delta n_r = \frac{\Delta R_p}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \quad (7.6)$$

где ΔR_p — ошибка разности расстояний,

φ — угол между фокальными радиусами-векторами.

Заменяя ΔR_p средней квадратической ошибкой разности расстояний σ_p , найдем среднюю квадратическую ошибку гиперболической линии положения как

$$\sigma_r = \frac{\sigma_p}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (7.7)$$

Если расстояние R от середины базы до точки M (рис. 1.9) значительно больше базы d , то

$$\frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \cong \frac{R}{d \cos \alpha},$$

где α — угол между нормалью к середине базы и радиусом-вектором R .

Тогда

$$\Delta n_r = \frac{R}{d \cos \alpha} \Delta R_p \quad (7.8)$$

и

$$\sigma_r = \frac{R}{d \cos \alpha} \sigma_p. \quad (7.9)$$

Эллиптическая линия положения (рис. 1.10) описывается уравнением

$$R_c = R_1 + R_2 = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$|\text{grad } R_c| = \sqrt{2 \left(1 + \frac{x^2 + y^2 - \frac{d^2}{4}}{R_1 R_2}\right)}.$$

Из $\triangle AMB$ следует, что

$$\cos \varphi = \frac{x^2 + y^2 - \frac{d^2}{4}}{R_1 R_2}.$$

Поэтому

$$|\text{grad } R_c| = 2 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Тогда ошибка эллиптической линии положения будет равна

$$\Delta n_s = \frac{\Delta R_c}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, \quad (7.10)$$

где ΔR_c — ошибка суммы расстояний,

φ — угол между фокальными радиусами-векторами.

Заменяя ΔR_c средней квадратической ошибкой суммы расстояний σ_c , получим среднюю квадратическую ошибку эллиптической линии положения как

$$\sigma_s = \frac{\sigma_c}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}. \quad (7.11)$$

Полученные формулы позволяют сделать следующие выводы.

При пеленгации ошибка линии положения, как это следует из формулы (7.2), при неизменной ошибке пеленга увеличивается с увеличением расстояния до объекта.

При дальнометрии ошибка линии положения согласно формуле (7.4) равна дальномерной ошибке и, следовательно, зависит от расстояния так же, как и дальномерная ошибка.

При измерении разности расстояний ошибка линии положения, как это следует из формулы (7.6), уменьшается с возрастанием расстояния между фиксированными точками. Следовательно, для повышения точности определения линии положения необходимо указанное расстояние увеличивать.

При измерении суммы расстояний, наоборот, целесообразно уменьшать расстояние между фиксированными точками, так как наименьшая ошибка линии положения, как это следует из формулы (7.10), будет при $\varphi=0$, т. е. при $d=0$.

Существенно отметить, что при одинаковых ошибках измерения интервалов времени наибольшую точность определения линии положения обеспечивает дальномерная система.

Точность эллиптической системы будет в $\frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}}$ раз хуже.

Точность гиперболических систем так же будет хуже в $\frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}$ раз.

Существенно также, что коэффициент пропорциональности между ошибкой линии положения и ошибкой измеряемой геометрической величины для азимутальных и дальномерных систем, как это следует из формул (7.2) и (7.4), не зависит от направления. Поэтому азимутальные и дальномерные системы являются всенаправленными.

Для гиперболических и эллиптических систем указанный коэффициент, как это следует из формул (7.6) и (7.10), зависит от направления. Поэтому гиперболические и эллиптические системы не являются всенаправленными. Так, для гиперболической системы коэффициент пропорциональности между ошибкой линии положения и ошибкой разности расстояний согласно формуле (7.6) будет

$$k_p = \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Следовательно, для случая, когда средняя квадратическая ошибка разности расстояний не зависит от положения искомой точки относительно фиксированных, линии постоянных значений средних квадратических ошибок линий положения будут представлять собой окружности, опирающиеся на базу. Наибольшая точность определения гиперболической линии положения будет на направлении, совпадающем с нормалью к середине базы, а наименьшая — на направлении, совпадающем с базой.

7.2. ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим сначала случай определения местоположения объекта на плоскости.

Пусть, например, местоположение цели определяется пеленгационным методом (рис. 7.1). Если при измерении пеленгов точки M возникли ошибки $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$, то найденное место точки M будет отличаться от истинного на величину MM_0 .

Расстояние между истинным местоположением и найденным называется ошибкой места. Очевидно, что при известных величинах ошибок $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$ определение ошибки места MM_0 не вызывает затруднений. Однако, как уже указывалось ранее, величины случайных ошибок, возникающих при измерении пеленгов, так же как и при измерении любых других величин, неизвестны. Встает в связи с этим вопрос, как характеризовать точность местоопределения?

Пусть линии положения пересекаются под углом ψ (рис. 7.2), а их случайные ошибки U и V подчиняются нормальным законам распределения.

Из теории вероятностей известно, что двумерная плотность распределения вероятностей ошибок U и V в этом случае будет

$$f(U, V) = \frac{1}{2\pi\sigma_U\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{U^2}{\sigma_U^2} - \frac{2\rho UV}{\sigma_U\sigma_V} + \frac{V^2}{\sigma_V^2} \right]}, \quad (7.12)$$

где σ_U и σ_V — средние квадратические ошибки линий положения,
 ρ — коэффициент корреляции.

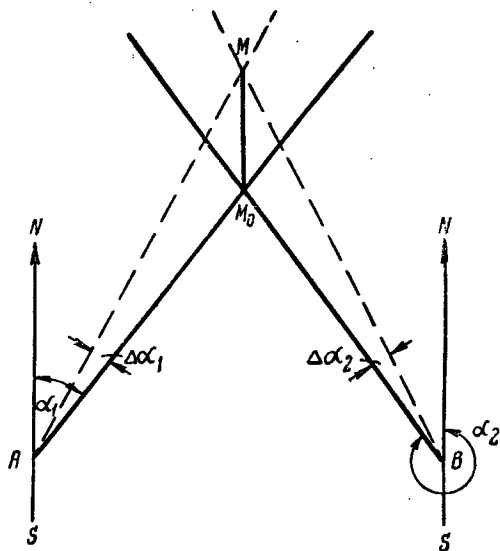


Рис. 7.1. Ошибка места, возникающая при определении местоположения пеленгационным методом.

Коэффициент корреляции характеризует степень вероятностной связи между случайными ошибками U и V и равен

$$\rho = \frac{\iint UV f(U, V) dU dV}{\sigma_U \sigma_V}.$$

Если случайные ошибки U и V независимы, то $\rho = 0$. Приравнявая показатель степени при e в формуле (7.12)

некоторой постоянной величине, получим уравнение кривой равной плотности распределения вероятностей

$$\frac{1}{2(1-\rho)^2} \left[\frac{U^2}{\sigma_U^2} - \frac{2\rho UV}{\sigma_U \sigma_V} + \frac{V^2}{\sigma_V^2} \right] = \lambda^2. \quad (7.13)$$

Можно показать, что кривая равной плотности распределения представляет собой эллипс (рис. 7.2).

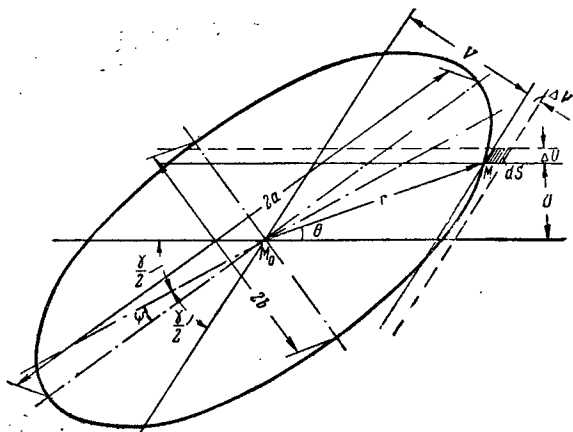


Рис. 7.2. Кривая равной плотности распределения вероятностей ошибок. (Эллипс ошибок).

Различным значениям параметра λ соответствует семейство софокусных эллипсов, которые принято называть эллипсами ошибок.

Вероятность нахождения искомого местоположения в пределах эллипса с параметром λ будет равна

$$P(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2}, \quad (7.14)$$

откуда

$$\lambda = \sqrt{-\ln(1-P)}. \quad (7.15)$$

Так, для эллипса ошибок, обладающего тем свойством, что вероятность нахождения в нем искомого местоположения равна $1/2$, значение параметра $\lambda = 0,832$.

Размеры полуосей эллипса ошибок при $\rho = 0$ будут равны

$$a = \sqrt{\frac{\frac{4\sigma_U^2\sigma_V^2\lambda^2}{\sigma_U^2 + \sigma_V^2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma_U^2\sigma_V^2}{\sigma_U^2 + \sigma_V^2} \sin^2 \gamma}}}, \quad (7.16)$$

$$b = \sqrt{\frac{\frac{4\sigma_U^2\sigma_V^2\lambda^2}{\sigma_U^2 + \sigma_V^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma_U^2\sigma_V^2}{\sigma_U^2 + \sigma_V^2} \sin^2 \gamma}}}. \quad (7.17)$$

Угол ψ , определяющий положение эллипса ошибок (рис. 7.2), будет равен

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sigma_U^2 - \sigma_V^2}{\sigma_U^2 + \sigma_V^2} \operatorname{tg} \gamma \right]. \quad (7.18)$$

Анализ возможных положений эллипса ошибок при различных значениях σ_U , σ_V и γ позволяет сделать следующий вывод: большая ось эллипса всегда лежит в остром угле пересечения линий положения и ближе к той из них, точность определения которой выше. Иными словами, большая ось эллипса ошибок всегда лежит между биссектрисой острого угла пересечения линий положений и той из линий положения, точность определения которой выше.

В частном случае при одинаковой точности определения линий положения большая ось эллипса совпадает с биссектрисой острого угла пересечения линий положения.

В другом частном случае, когда угол пересечения прямой, оси эллипса ошибок совпадают с линиями положения.

Если при этом $\sigma_x = \sigma_y$, то эллипсы ошибок превращаются в окружности, и эллиптическое рассеивание превращается в круговое.

Итак, точность определения местоположения объекта на плоскости наиболее полно характеризуется эллипсом ошибок.

Поэтому наиболее полное представление о зависимости точности местоопределения от взаимного расположения искомой точки и фиксированных дает так называемое

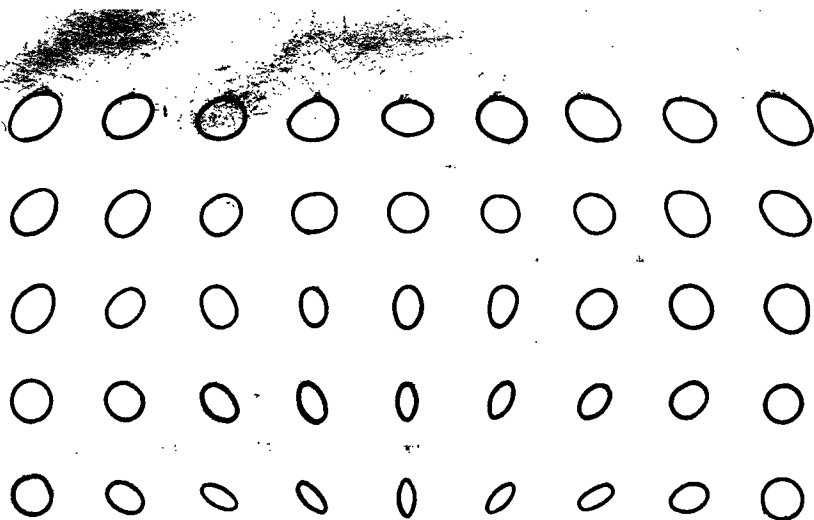


Рис. 7.3 Поле ошибок при дальномерно-пеленгационном методе местоопределения.

поле ошибок, представляющее собой ряд эллипсов ошибок заданной вероятности.

Приведенные выше формулы позволяют построить поле ошибок в заданных конкретных условиях; при этом необходимо иметь опытные данные о зависимости средних квадратических ошибок геометрических величин от взаимного расположения искомой точки и фиксированных.

Если по каким-либо причинам эти зависимости неизвестны, то в первом приближении для ориентировочного суждения о поле ошибок можно принять средние квадратические ошибки геометрических величин постоянными.

Для иллюстрации на рис. 7.3 представлено поле ошибок при дальномерно-пеленгационном методе местоопределения.

Рассмотрим теперь случай определения местоположения объекта в пространстве дальномерно-пеленгационным методом. Если при измерении дальности R , азимута α и угла места β возникли ошибки ΔR , $\Delta \alpha$ и $\Delta \beta$, то найденное местоположение цели не будет совпадать с истинным. Ошибка места r в этом случае будет равна расстоянию M_0M (рис. 7.4). Составляющие ошибки места по трем взаимно перпендикулярным осям X , Y и Z будут равны

$$\begin{aligned}x &= \Delta R, \\y &= R \cos \beta \Delta \alpha, \\z &= R \Delta \beta.\end{aligned}$$

Если случайные ошибки x , y и z взаимно независимы и подчиняются нормальным законам распределения, что в радиолокации обычно выполняется, то трехмерная плотность распределения вероятностей будет равна

$$f(x, y, z) = \frac{1}{V(2\pi)^3 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right]}, \quad (7.19)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_R, \\ \sigma_y &= R \cos \beta \sigma_\alpha, \\ \sigma_z &= R \sigma_\beta, \end{aligned}$$

а σ_R , σ_α , σ_β — средние квадратические ошибки по дальности, азимуту и углу места.

Приравняв показатель степени e в формуле (7.19) некоторой постоянной величине, получаем уравнение поверхности равной плотности распределения вероятностей

$$\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2} = \lambda^2. \quad (7.20)$$

Эта поверхность представляет собой эллипсоид с центром в начале координат и осями, совпадающими с осями

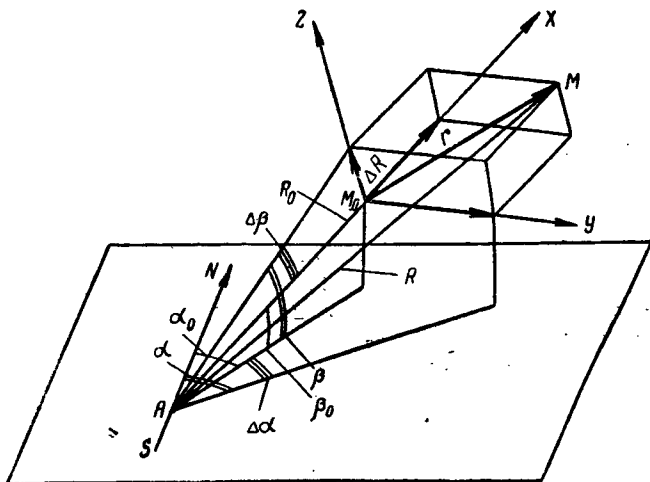


Рис. 7.4. Ошибка места при дальномерно-пеленгацонном методе определения местоположения.

координат. Разным значениям λ соответствует семейство софокусных эллипсоидов, которые условимся называть эллипсоидами ошибок.

Можно показать, что вероятность нахождения искомого местоположения в пределах эллипсоида ошибок будет равна

$$P(\lambda) = \Phi(\sqrt{2}\lambda) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lambda e^{-\lambda^2}, \quad (7.21)$$

где $\Phi(\sqrt{2}\lambda)$ — интеграл вероятности.

Для эллипсоида ошибок, обладающего тем свойством, что вероятность нахождения в нем искомого местоположения равна 0,5, значение параметра $\lambda = 1,088$.

Полуоси эллипсоида ошибок будут равны

$$a = \sqrt{2}\lambda\sigma_x, \quad (7.22)$$

$$b = \sqrt{2}\lambda\sigma_y, \quad (7.23)$$

$$c = \sqrt{2}\lambda\sigma_z. \quad (7.24)$$

Если $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$, то эллипсоид ошибок превращается в сферу ошибок и эллипсоидное рассеивание превращается в сферическое.

7.3. ОШИБКИ МЕСТА

В предшествующем параграфе было показано, что наиболее полное представление о точности местоопределения на плоскости дает эллипс ошибок, а в пространстве — эллипсоид ошибок. Вместе с тем остался открытым вопрос о вероятности появления ошибки места в заданных пределах. Для ответа на поставленный вопрос необходимо найти функцию распределения вероятностей ошибки места, под которой понимают вероятность того, что ошибка места не будет превосходить значения наперед заданной величины r .

Другими словами, функция распределения ошибок места определяет вероятность нахождения найденного местоположения в пределах окружности с радиусом, равным r .

Прежде всего найдем среднюю квадратическую ошибку места.

Из рис. 7.2 следует, что

$$r^2 = \frac{U^2 + V^2 + 2UV \cos \gamma}{\sin^2 \gamma}. \quad (7.25)$$

В теории вероятностей доказывается, что среднее значение суммы случайных величин равно сумме средних значений слагаемых. Поэтому

$$\bar{r}^2 = \frac{\bar{U}^2 + \bar{V}^2 + 2\bar{UV} \cos \gamma}{\sin^2 \gamma}.$$

Так как при нормальном законе распределения

$$\bar{U}^2 = \sigma_U^2,$$

$$\bar{V}^2 = \sigma_V^2,$$

то

$$\bar{UV} = \rho \sigma_U \sigma_V,$$

$$\bar{r}^2 = \frac{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 + 2\rho \sigma_U \sigma_V \cos \gamma}{\sin^2 \gamma},$$

откуда средняя квадратическая ошибка места равна

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 + 2\rho \sigma_U \sigma_V \cos \gamma}}{\sin \gamma}. \quad (7.26)$$

При $\rho = 0$

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2}}{\sin \gamma}. \quad (7.27)$$

Найдем теперь плотность распределения вероятностей ошибок места. С этой целью выполним преобразование переменных выражения (7.12) по следующей формуле:

$$f(r, \theta) = f[U(r, \theta), V(r, \theta)] \left| \frac{D(U, V)}{D(r, \theta)} \right|.$$

Так как

$$U = r \cdot \sin \theta,$$

$$V = r \cdot \sin (\gamma - \theta),$$

а модуль якобиана равен

$$\left| \frac{D(U, V)}{D(r, \theta)} \right| = r \sin \gamma,$$

то

$$f(r, \theta) = \frac{r \sin \gamma}{2\pi \sigma_U \sigma_V \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{\sin^2 \theta}{\sigma_U^2} - \frac{2\rho \sin \theta \sin (\gamma - \theta)}{\sigma_U \sigma_V} + \frac{\sin^2 (\gamma - \theta)}{\sigma_V^2} \right]}$$

Откуда плотность распределения вероятностей ошибок места равна

$$f(r) = \frac{r \sin \gamma}{2\pi\sigma_U\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}} \times \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{\sin^2 \theta}{\sigma_U^2} - \frac{2\rho \sin \theta \sin(\gamma-\theta)}{\sigma_U\sigma_V} + \frac{\sin^2(\gamma-\theta)}{\sigma_V^2} \right]} d\theta. \quad (7.28)$$

Соответственно функция распределения вероятностей ошибок места будет равна

$$P(r) = \frac{\sin \gamma}{2\pi\sigma_U\sigma_V\sqrt{1-\rho^2}} \times \int_0^r \int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{\sin^2 \theta}{\sigma_U^2} - \frac{2\rho \sin \theta \sin(\gamma-\theta)}{\sigma_U\sigma_V} + \frac{\sin^2(\gamma-\theta)}{\sigma_V^2} \right]} dr d\theta. \quad (7.29)$$

В частном случае, когда $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\rho = 0$, $\sigma_U = \sigma_V = \sigma$, т. е. при круговом рассеивании

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}. \quad (7.30)$$

Как видим, в этом случае плотность распределения вероятностей ошибок места описывается законом Релея.

Существенно, что релейское распределение значительно отличается от нормального. Если при нормальном законе распределения наиболее вероятное значение случайной величины имеет место при $r=0$, то при релейском законе максимальная плотность распределения вероятностей—при $r=\sigma$. Следовательно, при релейском законе распределения ошибок места наиболее вероятное ее значение равно средней квадратической ошибке линии положения.

Кроме того, при релейском распределении ошибок места в отличие от нормального распределения средняя квадратическая ошибка места не равна корню квадратному из дисперсии.

Функция распределения ошибок места при круговом рассеивании равна

$$P(r) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad (7.31)$$

откуда радиус окружности ошибок заданной вероятности будет равен

$$r = \sqrt{-2 \ln(1-P)} \sigma.$$

Поскольку в рассматриваемом случае средняя квадратическая ошибка места согласно формуле (7.27) равна

$$\sigma_r = \sqrt{2} \sigma.$$

то

$$r = \sqrt{-\ln(1-P)} \sigma_r. \quad (7.32)$$

График функции распределения по релейскому закону представлен на рис. 7.5 (график при $m = 1$).

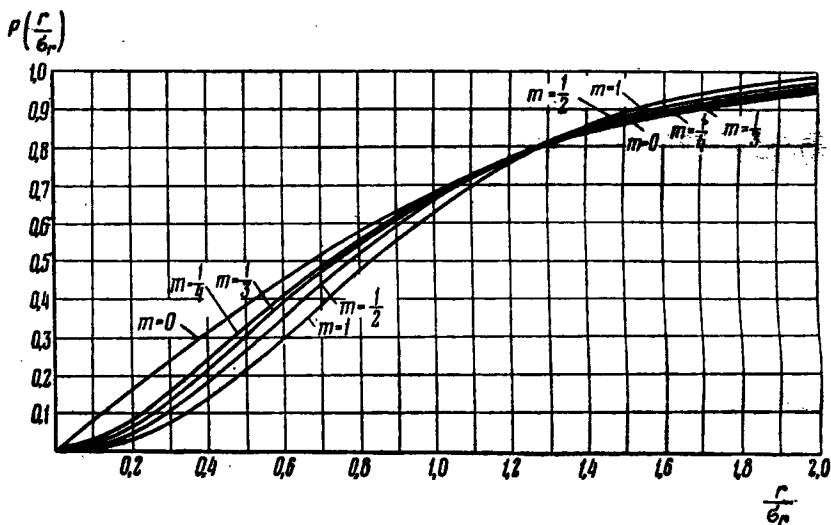


Рис. 7.5. Графики функции распределения вероятности по закону Релея.

В другом, более общем случае, когда $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\rho = 0$, но $\sigma_u = \sigma_x \neq \sigma_v = \sigma_y$, т. е. при таком эллиптическом рассеивании, когда оси эллипса ошибок совпадают с линиями положения

$$f(r) = \frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{\sigma_x^2} + \frac{\cos^2 \theta}{\sigma_y^2} \right]} d\theta =$$

$$= \frac{r}{\sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{r^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}{4\sigma_x^2 \sigma_y^2}} I_0 \left[\frac{r^2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{4\sigma_x^2 \sigma_y^2} \right], \quad (7.33)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Функция распределения ошибок места в рассматриваемом случае будет равна

$$P(r) = \int_0^r \frac{r}{\sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{r^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}{4\sigma_x^2 \sigma_y^2}} I_0 \left[\frac{r^2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{4\sigma_x^2 \sigma_y^2} \right] dr. \quad (7.34)$$

На рис. 7.5 представлены графики функции распределения вероятностей ошибок места в зависимости от отношения $\frac{r}{\sigma_r}$, соответствующие различным значениям $m = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$.

Между прочим, приведенные графики верны и для общего случая, когда $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ и $\rho \neq 0$. Только в этом случае под m следует понимать отношения малой полуоси эллипса ошибок к большой.

Как видим, функции распределения ошибок места как при круговом рассеивании ($m=1$), так и при эллиптическом ($0 < m < 1$) отличаются от функции распределения нормального закона ($m=0$). Однако при $P(r) > 0,6$ эти различия не столь велики. Так, вероятность того, что ошибка места не будет превосходить величины σ_r и $2\sigma_r$, лежит соответственно в пределах 0,63—0,68 и 0,95—0,98.

Таким образом, точность местоопределения на плоскости можно характеризовать либо эллипсом ошибок заданной вероятности, либо величиной средней квадратической ошибки места.

Рассмотрим теперь ошибки места в пространстве.

Из рис. 7.4 видно, что

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Поэтому среднее значение квадрата ошибки места будет равно

$$\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2.$$

Так как при нормальном законе распределения

$$\overline{x^2} = \sigma_x^2,$$

$$\overline{y^2} = \sigma_y^2,$$

$$\overline{z^2} = \sigma_z^2,$$

то

$$\overline{r^2} = \sigma_r^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2,$$

откуда средняя квадратическая ошибка места равна

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}. \quad (7.35)$$

Что же касается функции распределения ошибок места в пространстве, то ограничимся рассмотрением только случая сферического рассеивания.

Так как при сферическом рассеивании $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$, то согласно формуле (7.22) радиус сферы будет равен

$$r = \sqrt{2} \sigma \lambda,$$

откуда

$$\lambda = \frac{r}{\sqrt{2} \sigma}.$$

Подставляя это значение λ в формулу (7.21), получаем

$$P(r) = \Phi(r) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (7.36)$$

Плотность распределения вероятностей ошибок места при сферическом рассеивании равна

$$f(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}. \quad (7.37)$$

Как видим, при сферическом рассеивании плотность распределения вероятностей ошибок места описывается законом Максвелла.

График максвелловского закона распределения представлен на рис. 7.6.

Средняя квадратическая ошибка места в этом случае согласно формуле (7.35) равна

$$\sigma_r = \sqrt{3}\sigma. \quad (7.38)$$

При максвелловском распределении ошибок места в отличие от нормального распределения, средняя квадратиче-

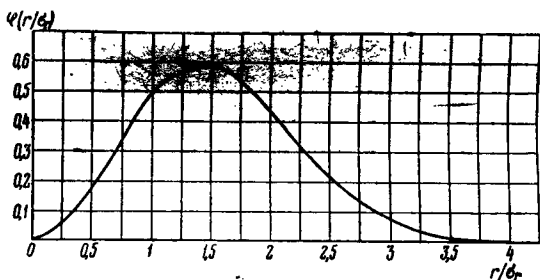


Рис. 7.6. График плотности распределения вероятности по закону Максвелла.

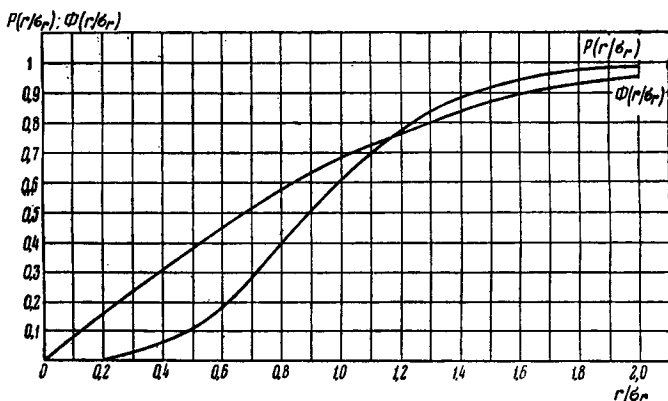


Рис. 7.7. График функции распределения ошибок места при сферическом рассеивании.

ская ошибка места не равна корню квадратному из дисперсии.

График функции распределения ошибок места при сферическом рассеивании представлен на рис. 7.7. Кроме того, на том же рисунке представлен график функции распределения по номинальному закону.

Как видим, функция распределения ошибок места при сферическом рассеивании отличается от нормального распределения. Однако при $P(r) > 0,6$ эти различия незначительны.

Вероятность того, что ошибка места при сферическом рассеивании не будет превосходить величины σ , и 2σ , равна соответственно 0,61 и 0,99.

Что касается функции распределения ошибок места при эллипсоидном рассеивании, то ограничимся замечанием, что графики этих функций не будут выходить за пределы двух графиков, представленных на рис. 7.7.

Итак, точность местоопределения в пространстве можно характеризовать либо эллипсоидом ошибок заданной вероятности, либо величиной средней квадратической ошибки места.