

Модель движения воздушной цели – кусочно стационарная: участки прямолинейного равномерного движения чередуются участками маневрирования с тангенциальным ускорением до $(0,8 \dots 1,0)g_0$ и виражами с нормальным ускорением маневра $g_M = (5 \dots 8) g_0$. При постоянной перегрузке $n_p = g_M/g_0$ радиус дуги на участке маневра равен

$$r_{M \min} = \frac{V_M^2}{g_0 \sqrt{n_p^2 - 1}},$$

Уравнения состояния: 1) динамические; 2) кинематические.

В общем случае кинематическое уравнение состояния

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = f(\vartheta(t)) + b_n(\eta(t)) \quad (1)$$

где $\vartheta(t)$ вектор параметров траектории цели; $f(\cdot)$ – известная вектор-функция; $b_n(\eta(t))$ — случайная вектор-функция, описывающая возмущения параметров траектории цели.

При дискретном наблюдении и полиномиальной модели движения уравнение состояния

$$\vartheta[n] = \Phi[n]\vartheta[n-1] + \mathbf{B}[n]\eta[n], \quad (2)$$

где: $\vartheta[n]$ – $(s+1)$ -мерный вектор параметров траектории, представленной полиномом s -й степени, на n -м шаге наблюдения (в момент времени t_n);

$\Phi[n]$ — известная $[(s+1) \times (s+1)]$ -мерная переходная матрица:

$$\Phi[n] = \begin{pmatrix} 1 & T_n & T_n^2/2! & T_n^3/3! & \dots \\ 0 & 1 & T_n & T_n^2/2! & \dots \\ 0 & 0 & 1 & T_n & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$T_n = t_n - t_{n-1},$$

t_n – момент последнего отсчета измеряемой координаты;

$\eta[n]$ – вектор, характеризующий возмущения параметров траектории;

$\mathbf{B}[n]$ – известная матрица.

Модель процесса измерения: зависимость между вектором $Y(t)$ измеряемых координат и вектором $\mathcal{G}(t)$ оцениваемых (наблюдаемых и ненаблюдаемых) параметров траектории.

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{h}[\mathcal{G}(t), t] + \zeta(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{h}[n]$ – известная вектор-функция; $\zeta(t)$ – случайная вектор-функция, представляющая аддитивные ошибки измерения координат.

Уравнение измерения для дискретных наблюдений:

$$\mathbf{Y}[n] = \mathbf{h}_n(\mathcal{G}(t)) + \Delta\mathbf{Y}[n], \quad (5)$$

где $\mathbf{Y}[n]$ – вектор измеряемых координат на n -м шаге; \mathbf{h}_n – известный оператор, устанавливающий связь между наблюдаемыми координатами и оцениваемыми параметрами траектории цели; $\Delta\mathbf{Y}[n]$ – вектор ошибок измерения координат.

При измерениях и оценивании параметров траекторий в полярных координатах, например для случая: $Y[n] = (r_n, \beta_n)$ и $\mathcal{G} = (\hat{r}_n, \hat{\dot{r}}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\dot{\beta}}_n)$

$$\mathbf{H}_n = \begin{matrix} & \hat{r}_n & \hat{\dot{r}}_n & \hat{\beta}_n & \hat{\dot{\beta}}_n \\ r_n & \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| & & & \\ \beta_n & & & & \end{matrix}. \quad (6)$$

При измерениях полярных координат $Y[n] = (r_n, \beta_n)$, а оценивании параметров в декартовых координатах $\mathcal{G} = (\hat{x}_n, \hat{\dot{x}}_n, \hat{y}_n, \hat{\dot{y}}_n)$ пересчет фильтруемых параметров в полярную систему производится по нелинейным формулам

$$\hat{r}_n = \sqrt{\hat{x}_n^2 + \hat{y}_n^2}, \quad \hat{\beta}_n = \arctg \frac{\hat{x}_n}{\hat{y}_n}, \quad (7)$$

а для пересчета элементов корреляционной матрицы ошибок вводится линеаризованный матричный оператор

$$\mathbf{H}_n = \left\| \begin{matrix} d\hat{r}_n/d\hat{x}_n & 0 & d\hat{r}_n/d\hat{y}_n & 0 \\ d\hat{\beta}_n/d\hat{x}_n & 0 & d\hat{\beta}_n/d\hat{y}_n & 0 \end{matrix} \right\|. \quad (8)$$

Полагаем, что ошибки измерений $\Delta\mathbf{Y}[n]$

– распределены по нормальному закону,

- ошибки измерения разных координат некоррелированы друг с другом,
- по каждой отдельно взятой координате – нормальные случайные величины с корреляционной матрицей:

$$\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

- возможны также систематические и медленно меняющиеся погрешности, обусловленные неточностью юстировки антенн, влиянием условий распространения радиоволн в тропосфере и ионосфере:

Оптимальная фильтрация параметров состояния динамической системы

Требуется результатам наблюдения случайного процесса $y(t) = h[\vartheta(t)] + v(t)$

оценить значение полезного сигнала $\vartheta(t+\tau)$ с наименьшими искажениями.

При $\tau < 0$ говорят о сглаживании параметров случайного процесса, при $\tau > 0$ – об экстраполяции, при $\tau = 0$ – о фильтрации.

Основа получения оценки $\vartheta(t+\tau)$ – его апостериорная плотность, а при оценивании квазидетерминированных процессов с неизвестными параметрами – апостериорная плотность значений параметров.

В соответствии с формулой Байеса многомерная апостериорная ПРВ

$$w(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n | y_1, y_2, \dots, y_n) = c_n p_n(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) w(y_1, y_2, \dots, y_n | \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n),$$

Для марковской модели изменений параметра ϑ_n условная ПРВ

$$w(\vartheta_n | \vartheta_{n-1}, \dots, \vartheta_1) \equiv w(\vartheta_n | \vartheta_{n-1})$$

а n -мерная априорная

$$p_n(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) = p_1(\vartheta_1) \prod_{i=2}^n w(\vartheta_i | \vartheta_{i-1}),$$

Если выборочные значения стационарной помехи v_n некоррелированы, то апостериорная ПРВ на n -м шаге

$$w(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n | y_1, y_2, \dots, y_n) = c_n p_1(\vartheta_1) w(y_1 | \vartheta_1) \prod_{i=2}^n w(\vartheta_i | \vartheta_{i-1}) w(y_i | \vartheta_i),$$

а на $n+1$ - шаге

$$w(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n+1} | y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = c_{n+1} p_1(\vartheta_1) w(y_1 | \vartheta_1) \prod_{i=2}^{n+1} w(\vartheta_i | \vartheta_{i-1}) w(y_i | \vartheta_i).$$

Тогда уравнение фильтрации марковского параметра

$$w(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n+1} | y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = c'_n p_n(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n+1}) w(y_{n+1} | \vartheta_{n+1}), \quad (10)$$

где $p_n(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n+1}) = w(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n | y_1, y_2, \dots, y_n) w(\vartheta_{n+1} | \vartheta_n)$ – условная априорная плотность вектора параметров ϑ_{n+1} в момент t_{n+1} при условии, что предшествующие наблюдения равны y_1, y_2, \dots, y_n .

Вычисления по формуле (10) в общем случае невозможны или затруднительны, поэтому в инженерной практике используют модели линейной фильтрации, условиями применимости которой являются линейные модели состояния системы и процесса измерений, а ошибки измерения полагаются гауссовыми.

Оптимальная оценка векторного параметра по критерию минимального среднего риска при квадратичной функции потерь находится из соотношения

$$\hat{\vartheta}_n = \int_{\Theta} \vartheta_n w(\vartheta_n | \mathbf{Y}^n) d\vartheta_n, \quad (11)$$

где $w(\vartheta_n | \mathbf{Y}^n)$ – апостериорная ПРВ текущего значения вектора параметров ϑ_n по данным последовательности измерений $\mathbf{Y}_n = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, Θ – пространство возможных значений оцениваемого параметра.

Если функция апостериорной ПРВ оцениваемого параметра унимодальна и обладает симметрией по отношению к моде, то оптимальная оценка параметра определяется из решения уравнения

$$\left. \frac{dw(\vartheta_n | \mathbf{Y}^n)}{d\vartheta_n} \right|_{\vartheta_n = \hat{\vartheta}_n} = 0, \quad \text{при} \quad \frac{d^2 w(\cdot)}{d\vartheta_n^2} < 0 \quad (12)$$

и называется оптимальной оценкой по критерию максимума апостериорной вероятности.

Если априорные сведения о фильтруемом параметре отсутствуют, оптимальная оценка определяется из решения уравнения правдоподобия

$$\left. \frac{d\Lambda(\mathbf{Y}^n | \mathcal{G}_n)}{d\mathcal{G}_n} \right|_{\mathcal{G}_n = \hat{\mathcal{G}}_n} = 0 \quad (13)$$

и называется оптимальной оценкой по критерию максимального правдоподобия.

Используется два подхода к оценке апостериорной ПРВ:

- групповой по фиксированной выборке наблюдений (метод скользящего сглаживания/фильтрации)
- рекуррентный – уточнение апостериорной ПРВ после каждого наблюдения (метод последовательного сглаживания/фильтрации).

Оптимальная линейная фильтрация и экстраполяция параметров траектории по фиксированной выборке

Синтезируем алгоритм оптимальной линейной фильтрации и экстраполяции в предположении

1. Модель невозмущенной траектории цели по каждой из независимых координат задается в виде полиномиальной функции

$$\mathbf{X}(\mathcal{G}, t) = \sum_{l=0}^s \theta_l \frac{t^l}{l!}, \quad (14)$$

причем $(s+1)$ -мерный вектор параметров траектории $\mathcal{G} = \|\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_s\|^T$ за время получения однократной оценки остается неизменным.

2. Вектор \mathbf{Y}_n результатов измерения, полученных в дискретные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n , линейно связан с вектором параметров траектории уравнением

$$\mathbf{Y}_N = \mathbf{A}_N \mathcal{G} + \Delta \mathbf{Y}_N, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2/2! & \dots & t_1^s/s! \\ 1 & t_2 & t_2^2/2! & \dots & t_2^s/s! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_N & t_N^2/2! & \dots & t_N^s/s! \end{pmatrix} \quad (16)$$

матрица Вандермонда, элементы которой представляют результат дифференцирования уравнения (15) по l -му параметру;

$$\Delta \mathbf{Y}_N = \|\Delta Y_1, \Delta Y_2, \dots, \Delta Y_N\|^T - \text{вектор погрешности измерения.}$$

3. Условная плотность вероятности (функция правдоподобия) единичного измерения имеет вид

$$\Lambda(Y_i | \mathfrak{G}) = \frac{1}{\sigma_{Y_i} \sqrt{2\pi}} \exp \left[- \left(Y_i - \sum_{l=0}^s \theta_l \frac{\tau_i^l}{l!} \right)^2 / 2\sigma_{Y_i}^2 \right], \quad (17)$$

где $\sigma_{Y_i}^2$ – дисперсия погрешности измерения, $\tau_i = (t_i - t_0)$

4. Совокупность ошибок N измерений координат представляет собой в общем случае N -мерную систему коррелированных нормально распределенных случайных величин и характеризуется ($N \times N$ -мерной корреляционной матрицей \mathbf{R}), а ее функция правдоподобия записывается в виде

$$\Lambda(Y_1, Y_2, \dots, Y_N | \mathfrak{G}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{R}_N|^{1/2}} \exp \left[- \frac{1}{2} \Delta \mathbf{Y}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} \Delta \mathbf{Y}_N \right], \quad (18)$$

где $\Delta \mathbf{Y}_N^T = \|\Delta Y_1, \Delta Y_2, \dots, \Delta Y_N\|$,

$$\Delta Y_i = \left(Y_i - \sum_{l=1}^s \theta_l \frac{\tau_i^l}{l!} \right) = [Y_i - X(\mathfrak{G}, \tau_i)],$$

\mathbf{R}_N^{-1} – обратная корреляционная матрица погрешностей измерения,

$|\mathbf{R}_N|$ – определитель корреляционной матрицы \mathbf{R}_N .

Получим алгоритм оптимальной фильтрации параметров траектории по критерию максимального правдоподобия.

Логарифм функции правдоподобия

$$\ln \Lambda(\mathbf{Y}^n / \mathfrak{G}_N) = \ln C - 0,5 \Delta \mathbf{Y}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} \Delta \mathbf{Y}_N. \quad (19)$$

Приравниваю нулю производные выражения (19) по составляющим вектора \mathfrak{G} при $\mathfrak{G}_N = \hat{\mathfrak{G}}_N$ получим

$$\mathbf{A}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} \left\| Y_i - \sum_{l=0}^s \hat{\theta}_l \frac{\tau_l^i}{l!} \right\| = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (20)$$

где \mathbf{A}_N^T – транспонированная матрица Вандермонда

Окончательное решение уравнения правдоподобия для общего случая коррелированных ошибок измерения имеет вид

$$\hat{\mathfrak{G}}_N = \mathbf{B}_N^{-1} \mathbf{A}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{Y}_N, \quad (21)$$

$$\mathbf{B}_N = \mathbf{A}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{A}_N,$$

\mathbf{Y}_n – N-мерный вектор результатов измерения.

Если погрешности измерения не коррелированы, то

$$\mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{Y}_N = \mathbf{Y}'_N = \left\| W_1 Y_1 \quad W_2 Y_2 \quad \dots \quad W_N Y_N \right\|^T,$$

где $W_i = 1 / \sigma_i^2$ — «вес» i -го измерения.

В этом случае выражение (21) записывается в виде

$$\hat{\mathfrak{G}}_N = \mathbf{B}_N^{-1} \mathbf{A}_N^T \mathbf{Y}'_N. \quad (22)$$

Выражение для корреляционной матрицы ошибок оценки параметров в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathbf{\Psi}_N = \mathbf{B}_N^{-1} = (\mathbf{A}_N^T \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{A}_N)^{-1}. \quad (23)$$

Для частного случая линейного изменения координаты

$$x_i = x_N - (N - i) \Delta_1 x_N, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \Delta_1 x_N = T_0 \dot{x}_N$$

и некоррелированных ошибок измерения можем записать

$$\hat{\mathfrak{G}}_N = \left\| \begin{array}{c} \hat{\theta}_{0N} \\ \hat{\theta}_{1N} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \hat{x}_N \\ \Delta_1 \hat{x}_N \end{array} \right\|, \quad \mathbf{A}_N^T = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ N-1 & N-2 & \dots & 0 \end{array} \right\|.$$

$$\mathbf{R}_N^{-1} = \left\| W_i \delta_{ij} \right\|,$$

где $W_i = 1/\sigma_{x_i}^2$; $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Подставляя выражения для \mathbf{A}_N^T и \mathbf{R}_N^{-1} в общее уравнение правдоподобия (20), получаем систему из двух уравнений для оценки

$$f_N \hat{x}_N - g_N \Delta_1 \hat{x}_N = \sum_{i=1}^N W_i x_i,$$

$$g_N \hat{x}_N - h_N \Delta_1 \hat{x}_N = \sum_{i=1}^N W_i (N-i) x_i,$$

$$\text{где } f_N = \sum_{i=1}^N W_i; \quad g_N = \sum_{i=1}^N (N-i) W_i; \quad h_N = \sum_{i=1}^N (N-i)^2 W_i.$$

Решение этой системы уравнений получается в виде

$$\hat{x}_N = \left(h_N \sum_{i=1}^N W_i x_i - g_N \sum_{i=1}^N (N-i) W_i x_i \right) / k_N, \quad (24)$$

$$\Delta_1 \hat{x}_N = \left(g_N \sum_{i=1}^N W_i x_i - f_N \sum_{i=1}^N (N-i) W_i x_i \right) / k_N,$$

где $k_N = f_N h_N - g_N^2$.

Допустим теперь, что на ограниченном интервале наблюдения измеренные значения координаты можно считать равноточными $W_1 = W_2 = \dots = W_N = W$. В этом случае

$$\begin{aligned} f_N &= NW, \\ g_N &= \frac{N(N-1)}{2} W, \\ h_N &= \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} W, \end{aligned}$$

а окончательные формулы для оценки параметров линейной траектории при равнодискретных и равноточных наблюдениях

$$\hat{x}_N = \sum_{i=1}^N \eta_{\hat{x}}(i) x_i, \quad \Delta_1 \hat{x}_N = \sum_{i=1}^N \eta_{\Delta_1 \hat{x}}(i) x_i, \quad (25)$$

где $\eta_{\hat{x}}(i) = \frac{2(3i-N-1)}{N(N+1)}$, $\eta_{\Delta_1 \hat{x}}(i) = \frac{6(2i-N-1)}{N(N^2-1)}$ – веса измерения при оценке

координаты и первого приращения, соответственно. Например, при $N = 3$ имеем:

$$\eta_{\hat{x}}(1) = -1/6, \quad \eta_{\hat{x}}(2) = 2/6, \quad \eta_{\hat{x}}(3) = 5/6,$$

$$\eta_{\Delta_1 \hat{x}}(1) = -1/2, \quad \eta_{\Delta_1 \hat{x}}(2) = 0, \quad \eta_{\Delta_1 \hat{x}}(3) = 1/2.$$

Следовательно

$$\hat{x}_3 = (5x_3 + 2x_2 - x_1)/6, \quad \Delta_1 \hat{x}_3 = (x_3 - x_1)/2.$$

Заметим, что для весовых коэффициентов всегда выполняются условия:

$$\sum_{i=1}^N \eta_{\hat{x}}(i) = 1, \quad \sum_{i=1}^N \eta_{\Delta_1 \hat{x}}(i) = 0.$$

При равнодискретных, но неравноточных измерениях матрица ошибок оценки параметров (23) равна

$$\Psi_N = \frac{1}{k_N} \begin{vmatrix} h_N & g_N \\ g_N & f_N \end{vmatrix}.$$

При равноточных измерениях элементы этой матрицы зависят только от числа измерений:

$$\Psi_n = \begin{vmatrix} 2(2N-1)/N(N+1) & 6/N(N+1) \\ 6/N(N+1) & 12/N(N^2-1) \end{vmatrix} \sigma_x^2.$$

Например, при $N = 3$ корреляционная матрица ошибок оценки параметров линейной траектории имеет вид

$$\Psi_n = \begin{vmatrix} 5/6 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \sigma_x^2.$$

. Зависимости нормированных элементов корреляционной матрицы ошибок оценки параметров линейной траектории от числа измерений показаны на рис. 1.

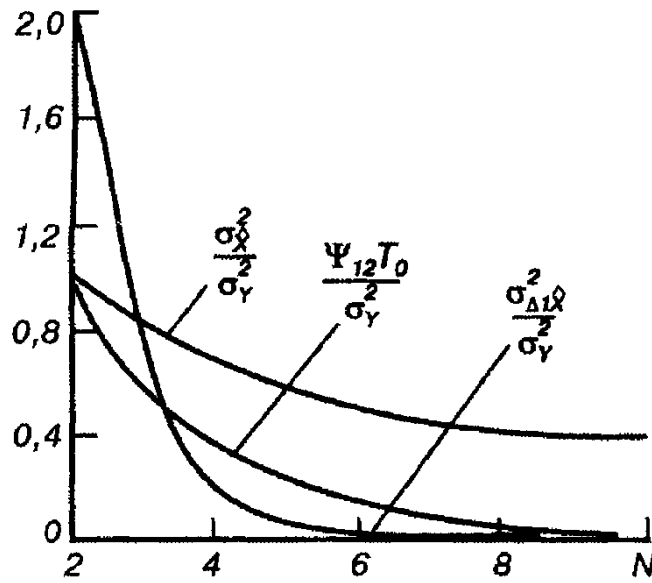


Рис. 1 Зависимость нормированных элементов корреляционной матрицы ошибок от числа N

Оценки параметров линейной траектории (24) и (25), , что они представляют собой алгоритмы нерекурсивных фильтров, а весовые коэффициенты $\eta_{\hat{x}}(i)$ и $\eta_{\Delta, \hat{x}}(i)$ образуют последовательность значений импульсной характеристики этих фильтров. В системах обработки радиолокационной информации алгоритмы нерекурсивной фильтрации применяются в основном на этапе обнаружения траектории при небольших выборках измерений ($N = 3-4$).

Алгоритмы экстраполяции параметров траектории

При полиномиальном представлении независимой координаты ее экстраполированные на время T_p параметры определяются по формулам

$$\hat{x}_{N+p} = \hat{x}_N + \hat{\dot{x}}_N T_p + \hat{\ddot{x}}_N \frac{T_p^2}{2} + \dots + \hat{x}_N^{(s)} \frac{T_p^s}{s!},$$

$$\hat{\dot{x}}_{N+p} = \hat{\dot{x}}_N + \hat{\ddot{x}}_N T_p + \dots + \hat{x}_N^{(s)} \frac{T_p^{s-1}}{(s-1)!},$$

.....

$$\hat{x}_{N+p}^s = x_N^s,$$

(26)

где $T_p = t_p - t_N$ – интервал времени экстраполяции. Для линейной траектории при равнодискретном измерении координаты и экстраполяции на целое число периодов обзора T_0

$$x_{N+p} = \hat{x}_N + \hat{\dot{x}}_N p T_0 = \hat{x}_N + \Delta_1 \hat{x}_N p, \quad (27)$$

где $p = T_p/T_0$. Подставив в (27) соответствующие выражения для сглаженных параметров, получим

$$x_{N+p} = \frac{1}{k_N} \left[(h_N + p g_N) \sum_{i=1}^N W_i x_i - (g_N + p f_N) \sum_{i=1}^N (N-i) W_i x_i \right],$$

где $k_N = f_N h_N - g_N^2$.

Если, кроме того, измерения равноточные, то

$$\hat{x}_{N+p} = \sum_{i=1}^N [\eta_{\hat{x}}(i) + p \eta_{\Delta_1 \hat{x}}(i)] x_i.$$

При $T_p = T_0$ ($p = 1$)

$$\hat{x}_{N+1} = \sum_{i=1}^N \eta_{\hat{x}_{N+1}}(i) x_i \quad (28)$$

где $\eta_{\hat{x}_{N+1}}(i) = 2(3i - N - 2) / N(N-1)$ – весовая функция измеренных значений координаты при экстраполяции параметров на один период измерения.

Корреляционная матрица ошибок экстраполяции параметров линейной траектории при равнодискретных измерениях имеет вид

$$\Psi_{N+p} = \left\| \begin{array}{cc} h_N + 2p g_N + p^2 f_N & g_N + p f_N \\ g_N + p f_N & f_N \end{array} \right\| \frac{1}{k_N}. \quad (29)$$

Если, кроме того, измерения равноточные, то элементы матрицы (29)

$$\Psi_{11} = \frac{2[(N-1)(2N-1) + 6p(N-1) + 6p^2]}{N(N^2-1)} \sigma_x^2, \quad \Psi_{12} = \Psi_{21} = \frac{6[(N-1) + p]}{N(N^2-1)} \sigma_x^2, \quad \Psi_{22} = \frac{12}{N(N^2-1)} \sigma_x^2. \quad (30)$$

Рекуррентные алгоритмы фильтрации параметров невозмущенной траектории

Пусть модель невозмущенной траектории объекта задана в прямоугольной системе координат уравнением

$$\mathcal{G}_n = \Phi_n \mathcal{G}_{n-1},$$

а наблюдаемая случайная последовательность (в той же системе координат)

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{H} \mathcal{G}_n + \Delta \mathbf{Y}_n,$$

\mathcal{G}_n – $(s+1)$ -мерный вектор фильтруемых параметров траектории; \mathbf{Y}_n – l -мерный вектор наблюдаемых координат; $\Delta \mathbf{Y}_n$ – l -мерный вектор погрешностей измерения с математическим ожиданием, равным нулю, и известной корреляционной матрицей \mathbf{R}_n ; Φ_n , \mathbf{H} – известные матрицы.

Требуется получить выражение для $\hat{\mathcal{G}}_n$, используя для этого вектор $\hat{\mathcal{G}}_{n-1}$ предыдущих оценок и результаты нового измерения \mathbf{Y}_n , а также выражение для корреляционной матрицы ошибок оценивания Ψ_{n-1} по известным матрицам Ψ_{n-1} и \mathbf{R}_n .

Вычислив апостериорную плотность параметра $\hat{\mathcal{G}}_n$, и приравняв нулю ее производные по компонентам вектора $\hat{\mathcal{G}}_n$, можем найти оценку по критерию максимума апостериорной вероятности.

Пусть имеется оценка $\hat{\mathcal{G}}_{n-1}$ вектора параметров \mathcal{G}_{n-1} , полученная по результатам предыдущих $(n - 1)$ измерений координаты. Распределение вектора $\hat{\mathcal{G}}_{n-1}$ предполагается нормальным с математическим ожиданием \mathcal{G}_{n-1} и корреляционной матрицей Ψ_{n-1} . Вектор $\hat{\mathcal{G}}_{n-1}$ экстраполируется на момент следующего (n -го) измерения в соответствии с уравнением

$$\hat{\mathcal{G}}_{n/n-1} = \Phi_n \hat{\mathcal{G}}_{n-1}. \quad (31)$$

Конкретный вид матрицы экстраполяции определяется моделью траектории цели. Например, для координаты x_n представляемой полиномом второй степени

$$\hat{\mathfrak{G}}_{n-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{n-1} & \hat{\dot{x}}_{n-1} & \hat{\ddot{x}}_{n-1} \end{bmatrix}^T,$$

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} 1 & T_n & T_n^2/2 \\ 0 & 1 & T_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а выражение (31) представляется в виде

$$\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{n/n-1} \\ \hat{\dot{x}}_{n/n-1} \\ \hat{\ddot{x}}_{n/n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_n & T_n^2/2 \\ 0 & 1 & T_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{n-1} \\ \hat{\dot{x}}_{n-1} \\ \hat{\ddot{x}}_{n-1} \end{bmatrix},$$

Корреляционная матрица Ψ_{n-1} также экстраполируется к моменту времени t_n по формуле

$$\Psi_{n/n-1} = \Phi_n \Psi_{n-1}^{-1} \Phi_n^T. \quad (32)$$

С учетом линейности оператора экстраполяции распределение вектора экстраполированных параметров будет также нормальным

$$w(\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1}) = C_1 \exp[-0,5(\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1} - \mathfrak{G}_n)^T \Psi_{n/n-1}^{-1} (\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1} - \mathfrak{G}_n)], \quad (33)$$

где: \mathfrak{G}_n — вектор истинных значений параметров в момент t_n ;
 C_1 — нормирующий множитель.

Полагаем, что погрешности измерения координат нормально распределены и не коррелированы в соседних обзорах. Следовательно, функция правдоподобия вектора \mathbf{Y}_n

$$\Lambda(\mathbf{Y}_n | \mathfrak{G}_n) = C_2 \exp[-0,5(\mathbf{Y}_n - \mathbf{H}\mathfrak{G}_n)^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \mathbf{H}\mathfrak{G}_n)], \quad (34)$$

где \mathbf{R}_n^{-1} обратная корреляционная матрица погрешностей измерения.

В предположении об отсутствии межобзорной корреляции погрешностей измерения апостериорная плотность вероятности для параметра \mathfrak{G}_n после n измерений определяется по формуле Байеса

$$w(\hat{\mathfrak{G}}_n | \mathbf{Y}_n) = C_3 w(\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1}) \Lambda(\mathbf{Y}_n | \mathfrak{G}_n), \quad (35)$$

причем вследствие того, что распределения составляющих – нормальные, апостериорное распределение (35) также будет нормальным:

$$w(\hat{\mathfrak{G}}_n | \mathbf{Y}_n) = C_4 \exp[-0,5(\hat{\mathfrak{G}}_n - \mathfrak{G}_n)^T \Psi_n^{-1}(\hat{\mathfrak{G}}_n - \mathfrak{G}_n)], \quad (36)$$

где $\hat{\mathfrak{G}}_n$ – вектор усредненных (отфильтрованных) параметров по результатам n измерений; Ψ_n – корреляционная матрица ошибок оценки вектора параметров.

Для нормального распределения $\max w(\hat{\mathfrak{G}}_n | \mathbf{Y}_n)$ соответствует математическому ожиданию вектора оцениваемых параметров. Следовательно, оценки по критерию минимума СКО и максимума апостериорной вероятности совпадают. Найдем параметры $\hat{\mathfrak{G}}_n$ и матрицы Ψ_n в выражении (36).

Используя выражения (33) и (34) для плотностей вероятности, входящих в формулу (35), после логарифмирования получаем

$$\begin{aligned} (\hat{\mathfrak{G}}_n - \mathfrak{G}_n)^T \Psi_n^{-1}(\hat{\mathfrak{G}}_n - \mathfrak{G}_n) &= (\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1} - \mathfrak{G}_n)^T \Psi_{n/n-1}^{-1}(\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1} - \mathfrak{G}_n) + \\ &+ (\mathbf{Y}_n - \mathbf{H}\mathfrak{G}_n)^T \mathbf{R}_n^{-1}(\mathbf{Y}_n - \mathbf{H}\mathfrak{G}_n) + \text{const.} \end{aligned}$$

Из этого уравнения находим

$$\begin{aligned} \Psi_n^{-1} &= \Psi_{n/n-1}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}; \\ \hat{\mathfrak{G}}_n &= \hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1} + \Psi_n \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \mathbf{H}\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1}). \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая выражения (31) и (32) для $\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1}$ и $\Psi_{n/n-1}$ основные соотношения оптимального алгоритма последовательной фильтрации можно представить в виде:

1. $\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1} = \Phi_n \hat{\mathfrak{G}}_{n-1}$.
2. $\Psi_{n/n-1} = \Phi_n \Psi_{n-1} \Phi_n^T$.
3. $\Psi_n = \Psi_{n/n-1} - \Psi_{n/n-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \Psi_{n/n-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_n)^{-1} \mathbf{H} \Psi_{n/n-1}$.
4. $\mathbf{K}_n = \Psi_n \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1}$.
5. $\hat{\mathfrak{G}}_n = \hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1} + \mathbf{K}_n (\mathbf{Y}_n - \mathbf{H}\hat{\mathfrak{G}}_{n/n-1})$.

(38)

Система уравнений (38) представляет алгоритм оптимального рекуррентного линейного фильтра – уравнения фильтра Калмана. Эти уравнения могут быть преобразованы к более удобному для реализации виду:

1. $\hat{\mathcal{G}}_{n/n-1} = \Phi_n \hat{\mathcal{G}}_{n-1}$.
2. $\Psi_{n/n-1} = \Phi_n \Psi_{n-1} \Phi_n^T$.
3. $K_n = \Psi_{n/n-1} H^T (H \Psi_{n/n-1} H^T + R_n)^{-1}$.
4. $\hat{\mathcal{G}}_n = \hat{\mathcal{G}}_{n/n-1} + K_n (Y_n - H \hat{\mathcal{G}}_{n/n-1})$.
5. $\Psi_n = \Psi_{n/n-1} - K_n H \Psi_{n/n-1}$.

(39)

Общая структурная схема фильтра Калмана представлена на рис. 2 (обозначения экстраполированных значений $\hat{\mathcal{G}}_{n/n-1}$ и $\Psi_{n/n-1}$ для сокращения записи заменены обозначениями $\hat{\mathcal{G}}_{эн}$ и $\Psi_{эн}$).

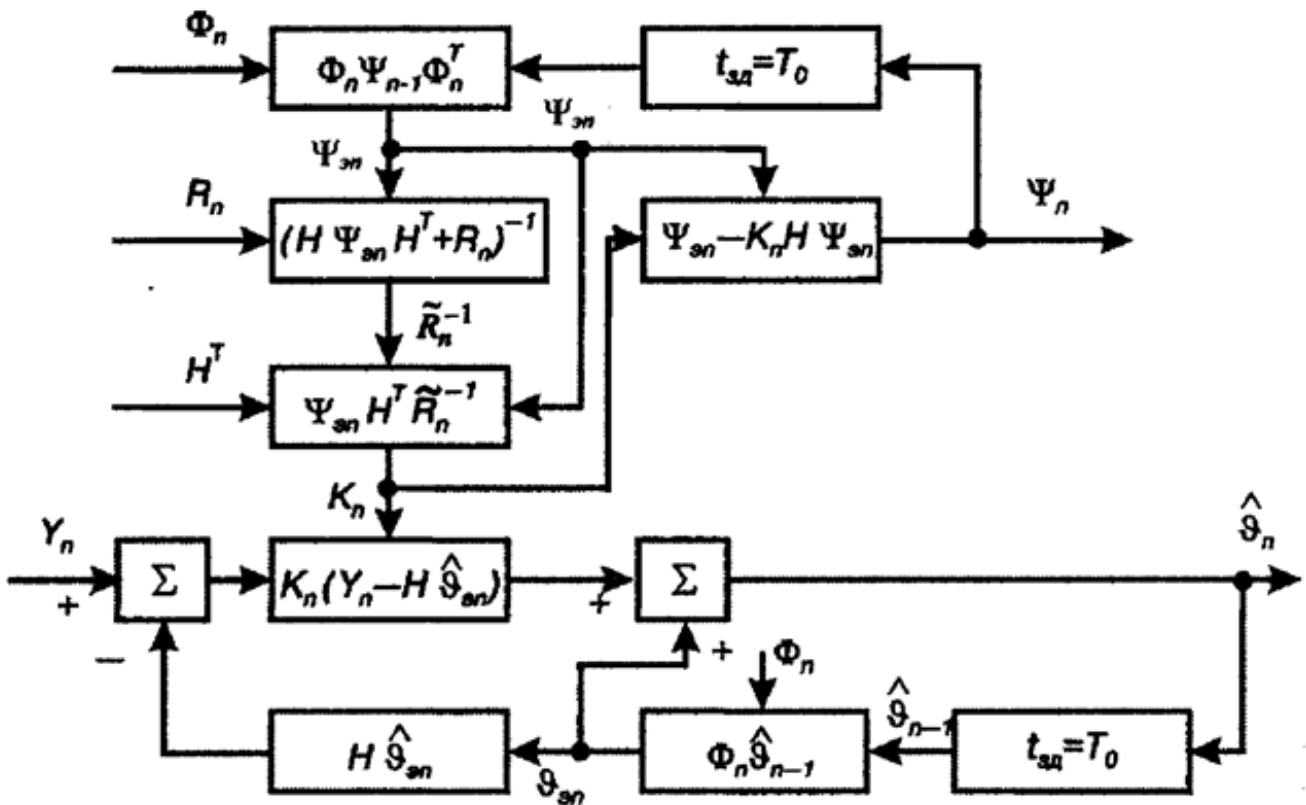


Рис. 2. Структурная схема линейного рекуррентного фильтра (фильтра Калмана)

Рекуррентная фильтрация параметров линейной траектории

Формулы алгоритма последовательной фильтрации параметров линейной траектории получают непосредственно из уравнения (39). В качестве фильтруемых параметров будем рассматривать координату \hat{x}_n и скорость ее изменения $\hat{\dot{x}}_n$ на момент последнего (n -го) измерения. Измерения x_n предполагаются равнодисcretными с периодом T_0 . В этом случае:

$$\Phi_n = \Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Пусть по данным предыдущих ($n-1$) измерений координаты x получены вектор фильтруемых параметров

$$\hat{\mathfrak{S}}_{n-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{n-1} \\ \hat{\dot{x}}_{n-1} \end{bmatrix}$$

и корреляционная матрица ошибок оценки этих параметров

$$\Psi_{n-1} = \frac{1}{k_{n-1}} \begin{bmatrix} h_{n-1} & g_{n-1}/T_0 \\ g_{n-1}/T_0 & f_{n-1}/T_0^2 \end{bmatrix}.$$

2. В соответствии с принятой моделью траектории экстраполяция координаты на момент следующего измерения производится по формулам

$$\hat{\mathfrak{S}}_{n/n-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{n/n-1} \\ \hat{\dot{x}}_{n/n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{n-1} + \hat{\dot{x}}_{n-1}T_0 \\ \hat{\dot{x}}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

3. Корреляционная матрица ошибок экстраполяции вычисляется по формуле $\Psi_{n/n-1} = \Phi_n \Psi_{n-1} \Phi_n^T$ и в окончательном виде записывается так

$$\Psi_{n/n-1} = \frac{1}{k_{n-1}} \begin{bmatrix} h_{n-1} + 2g_{n-1} + f_{n-1} & (g_{n-1} + f_{n-1})/T_0 \\ (g_{n-1} + f_{n-1})/T_0 & f_{n-1}/T_0^2 \end{bmatrix}$$

4. После n -го измерения координаты x_n с дисперсией погрешности измерения $\sigma_{x_n}^2$ можно рассчитать корреляционную матрицу ошибок фильтрации параметров:

$$\Psi_n = \frac{1}{k_n} \begin{vmatrix} h_n & g_n/T_0 \\ g_n/T_0 & f_n/T_0^2 \end{vmatrix},$$

где $h_n = h_{n-1} + 2g_{n-1} + f_{n-1}$; $g_n = g_{n-1} + f_{n-1}$;

$$f_n = f_{n-1} + W_n; k_n = k_{n-1} + W_n h_n; \quad (40)$$

$W_n = 1/\sigma_{x_n}^2$ – вес последнего измерения.

Формулы (40) позволяют непосредственно формировать элементы матрицы Ψ_n из элементов матрицы Ψ_{n-1} с учетом веса последнего измерения.

5. Матричный коэффициент усиления фильтра

$$\mathbf{K}_n = \Psi_n \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1}$$

в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathbf{K}_n = \begin{vmatrix} A_n \\ B_n/T_0 \end{vmatrix}, \quad (41)$$

где $A_n = h_n W_n / k_n$; $B_n = g_n W_n / k_n$.

6. С учетом полученных соотношений окончательные формулы для вычисления оценок параметров линейной траектории имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}_n &= \hat{x}_{n/n-1} + A_n (x_n - \hat{x}_{n/n-1}), \\ \hat{\dot{x}}_n &= \hat{\dot{x}}_{n/n-1} + B_n/T_0 (x_n - \hat{x}_{n/n-1}). \end{aligned} \quad (42)$$

При равнодискретных и равноточных измерениях координаты:

$$f_n = nW; g_n = \frac{n(n-1)}{2}W; \quad (43)$$

$$h_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}W; k_n = \frac{n^2(n^2-1)}{12}W^2.$$

Подставляя эти значения в выражения (41), получаем

$$A_n = 2(2n-1)/n(n+1); B_n = 6/n(n+1).$$

Зависимости коэффициентов A_n и B_n от числа наблюдений n приведены на рис. 3.

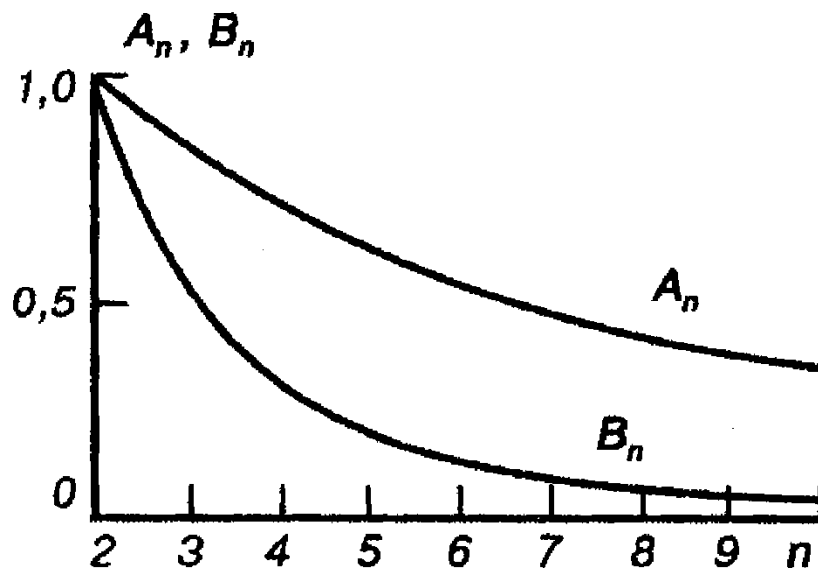


Рис.3 Зависимость коэффициентов A_n и B_n от числа наблюдений