

Непрерывное вейвлет-преобразование функции $x(t)$

$$\gamma(\tau, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right) dt$$

где $\psi(t)$ – материнский вейвлет, τ – временной сдвиг, s – параметр масштаба.

Обратное вейвлет-преобразование

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau, s) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right) d\tau \frac{ds}{|s|^2}$$

где C_ψ – постоянная допустимости:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\zeta)|^2}{|\zeta|} d\zeta \quad \Psi(\zeta) \text{ – преобразование Фурье от } \psi(t).$$

Материнский вейвлет связан с дочерним вейвлетом соотношением:

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right).$$

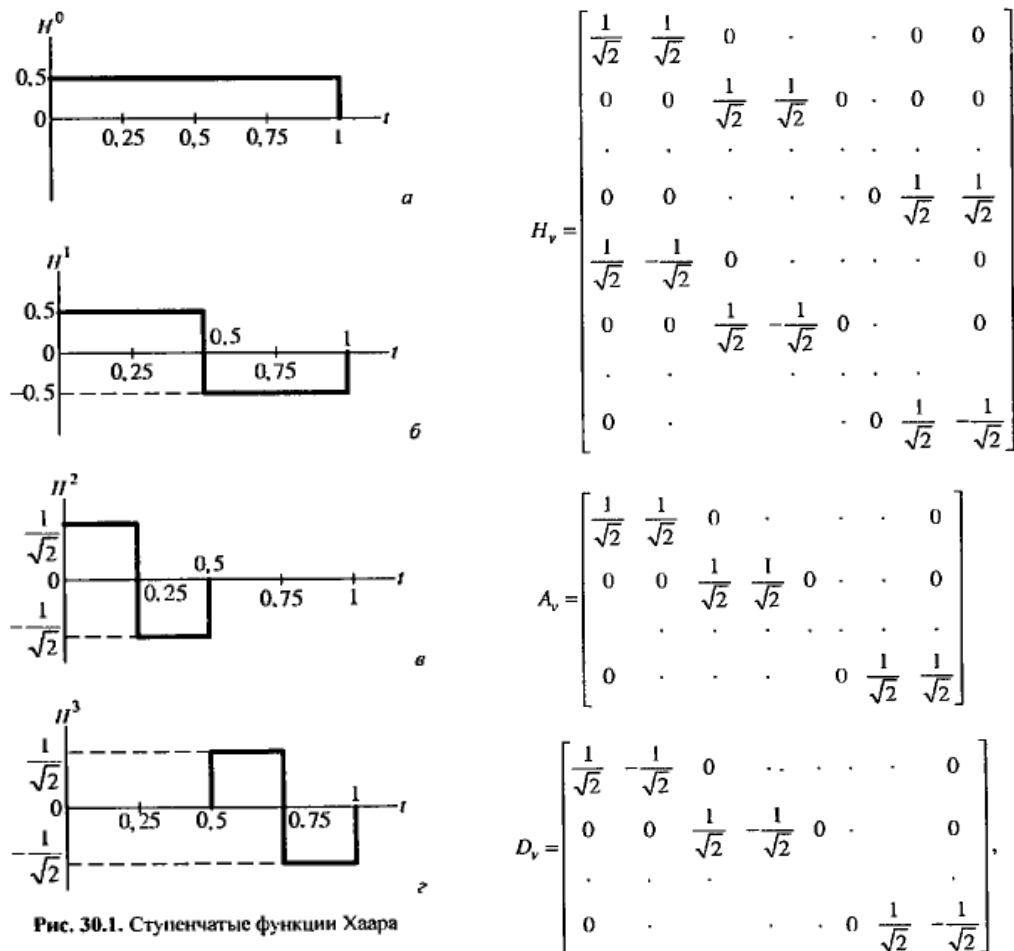


Рис. 30.1. Ступенчатые функции Хаара

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная плотность $\Psi(\omega)$
Вещественные непрерывные базисы		
Гауссовы: – первого порядка, или WAVE-вейвлет, – второго порядка, или МНАТ-вейвлет «мексиканская шляпа» – <u>mexican hat</u> , – n -го порядка,	$-t \exp(-t^2/2)$	$(i\omega)\sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
	$(1-t^2) \exp(-t^2/2)$	$(i\omega)^2 \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
	$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} [\exp(-t^2/2)]$	$(-1)^n (i\omega)^n \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
DOG – <u>d</u> ifference of <u>g</u> aussians	$e^{-t^2/2} - 0,5e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi}(e^{-\omega^2/2} - e^{-2\omega^2})$
LP-Littlewood & Paley	$(\pi t)^{-1}(\sin 2\pi t - \sin \pi t)$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, \pi \leq t \leq 2\pi, \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$
Вещественные дискретные		
НААР-вейвлет	$\begin{cases} 1, 0 \leq t \leq 1/2, \\ \geq -1, 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0, t < 0, t > 0. \end{cases}$	$i e^{i\omega/2} \frac{\sin^2 \omega/4}{\omega/4}$
ФНАТ-вейвлет, или «французская шляпа» (French <u>h</u> at – похож на цилиндр)	$\begin{cases} 1, t \leq 1/3, \\ \geq -1/2, 1/3 \leq t \leq 1, \\ 0, t > 1. \end{cases}$	$\frac{4 \sin^3 \omega/3}{3 \omega/3}$
Комплексные		
Морле (Morlet)	$e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$
Пауля (Paul) (чем больше n , тем больше нулевых моментов имеет вейвлет)	$\Gamma(n+1) \frac{i^n}{(1-it)^{n+1}}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi} (\omega)^n e^{-\omega}$

