Цифровые фильтры

Линейное разностное ур-ние

$$y_k = \sum_{i=0}^{m} a_i x_{k-i} - \sum_{i=1}^{\ell} b_i y_{k-i}$$

Z – преобразование $x(kT_Д)$

$$X(z) = \mathcal{Z}\left\{x(kT_Д)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_Д) z^{-k}$$

Примеры

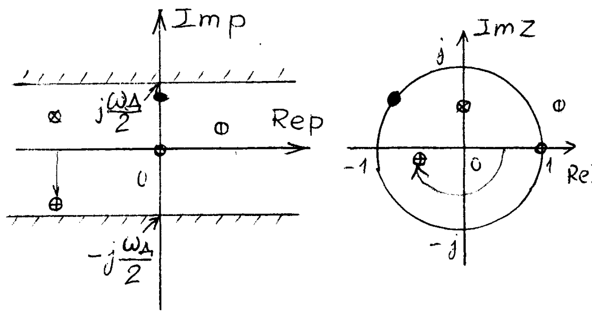
$$x(kT) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad : \quad X(z) = 1$$

$$x(kT) = \begin{cases} e^{jk\omega T}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad ; \quad X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}}$$

Связь с преобразованиями Лапласа и Фурье

$$z = e^{pT}; \; p = \sigma + j\omega \rightarrow X(e^{pT})$$

$$z = e^{j\omega T_Д} \rightarrow X(e^{j\omega T_Д})$$



Обратное Z-преобразование

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z) z^{k-1} dz$$

Свойства Z-преобразования

1) $\mathcal{Z}\left\{a x(kT)\right\} = a\,\mathcal{Z}\left\{x(kT)\right\}$
2) $\mathcal{Z}\left\{x(kT) + y(kT)\right\} = \mathcal{Z}\left\{x(kT)\right\} + \mathcal{Z}\left\{y(kT)\right\}$
3) $\mathcal{Z}\left\{x(kT - iT)\right\} = \mathcal{Z}\left\{x(kT)\right\} z^{-i}$

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i X(z) z^{-i} - \sum_{i=1}^{\ell} b_i Y(z) z^{-i}$$

$$K(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{\ell} b_i z^{-i}}$$

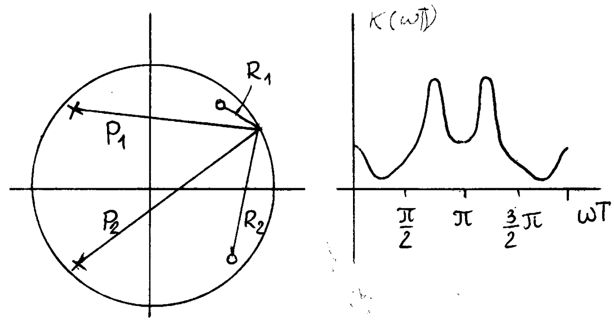
$$y(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{Y(z)\right\}; \quad Y(z) = K(z) X(z)$$

$$K(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^{-k}$$

$$h(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} K(z) z^{k-1} dz$$

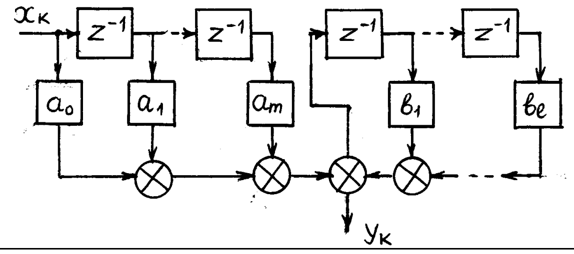
АЧХ

$$|K(j\omega)| = C \frac{|e^{j\omega T} - z_{01}| \cdots |e^{j\omega T} - z_{0m}|}{|e^{j\omega T} - z_{p1}| \cdots |e^{j\omega T} - z_{p\ell}|} = C \frac{R_1 \cdots R_m}{P_1 \cdots P_\ell}$$



Реализация ЦФ

Прямая форма

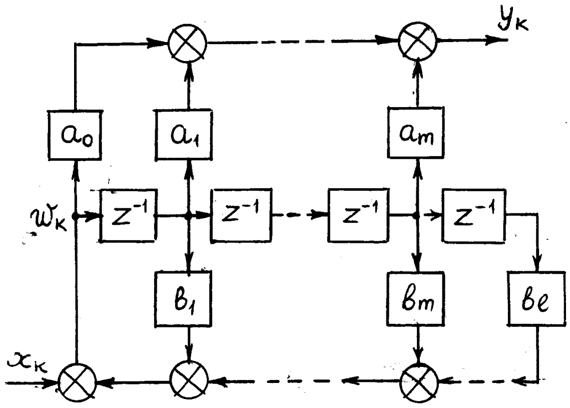


Каноническая форма

$$Y(z) = W(z) \sum_{i=0}^{m} a_i z^{-i}$$

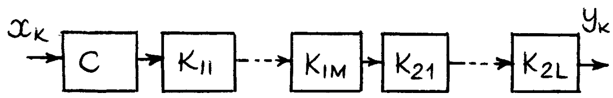
$$W(z) = X(z) \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{l} b_i z^{-i}}$$

$$w_k = x_k - \sum_{i=1}^{l} b_i w_{k-i}$$



Последовательная каноническая форма реализации ЦФ

$$K(z) = C \prod_{i=1}^{M} K_{1i}(z) \prod_{j=1}^{L} K_{2j}(z)$$



$$K_{1i}(z) = \frac{1 + A_{1i} z^{-1}}{1 + B_{1i} z^{-1}}$$

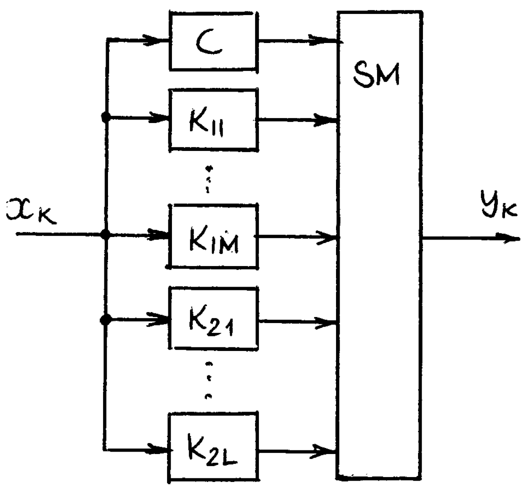
$$K_{2j}(z) = \frac{1 + A_{1j} z^{-1} + A_{2j} z^{-2}}{1 + B_{1j} z^{-1} + B_{2j} z^{-2}}$$

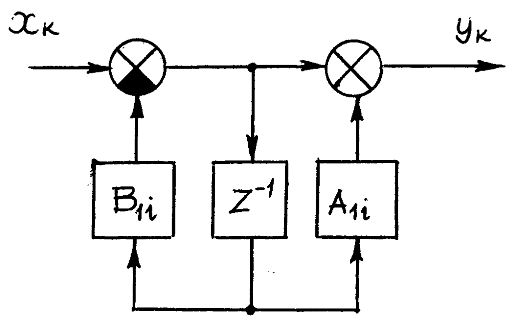
Параллельная каноническая форма

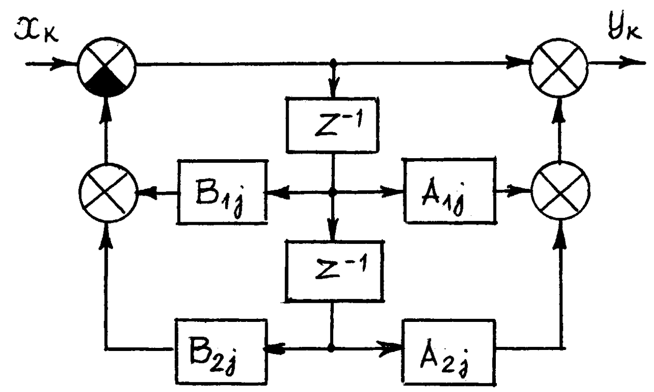
$$K(z) = C + \sum_{i=1}^{M} K_{1i}(z) + \sum_{j=1}^{L} K_{2j}(z)$$

$$K_{1i}(z) = \frac{A_{0i}}{1 + B_{1i} z^{-1}}$$

$$K_{2j}(z) = \frac{A_{0j} + A_{1j} z^{-1}}{1 + B_{1j} z^{-1} + B_{2j} z^{-2}}$$







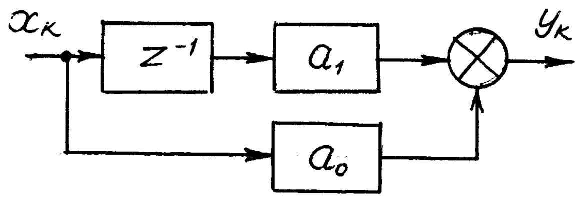
Примеры ЦФ

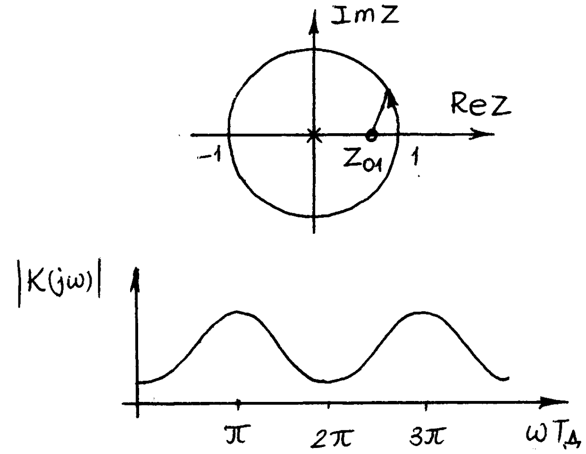
1. ЦФ с одним нулем

$$y_к = a_0 x_к + a_1 x_{к-1}$$

$$K(z) = a_0 + a_1 z^{-1} = \frac{a_0 z + a_1}{z}$$

$$z_{01} = -\frac{a_1}{a_0}\ ; \quad z_{p1} = 0$$





$$K(j\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\omega T_Д} =$$

$$= a_0 + a_1 \cos\omega T_Д - j a_1 \sin\omega T_Д$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{(a_0 + a_1\cos\omega T_Д)^2 + a_1^2 \sin^2\omega T_Д} =$$

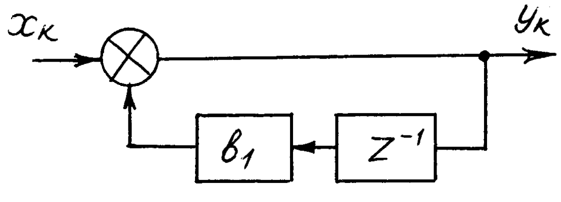
$$= \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + 2a_0 a_1 \cos\omega T_Д}$$

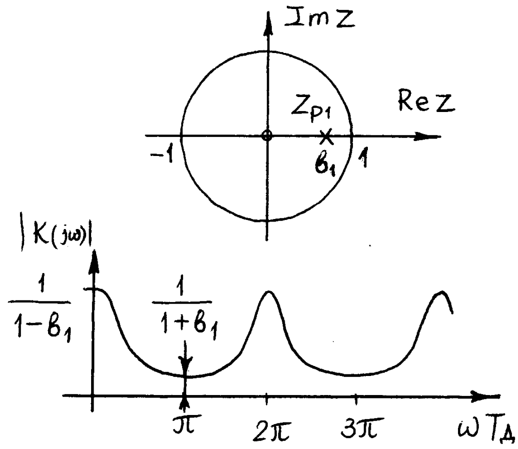
2. ЦФ с одним полюсом

$$y_к = x_к + b_1 y_{к-1}$$

$$K(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1}} = \frac{z}{z - b_1}$$

$$z_{p1} = b_1\ ; \quad z_{01} = 0$$

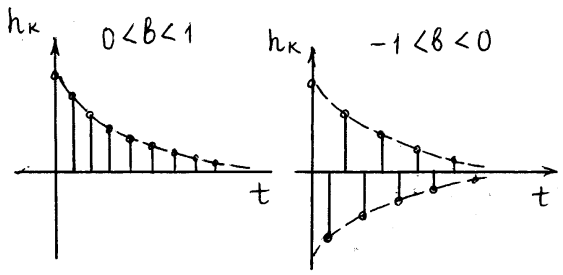




$$K(j\omega)=\frac{1}{1-b_1\cos\omega T_Д + j b_1\sin\omega T_Д}$$

$$|K(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+b_1^2-2b_1\cos\omega T_Д}}$$

Устойчив при $|b|<1$



Методы синтеза ЦФ

— синтез во временной области

— синтез в частотной области

1. Прямые методы синтеза
2. Непрямые методы синтеза

Методы синтеза нерекурсивных ЦФ

1. Метод классического численного анализа (использования формул численного интегрирования, дифференцирования и интерполяциии

$$Y_к = X_к - X_{к-1}$$

2. Метод ряда Фурье
3. Метод наименьших квадратов
4. Метод полиномов Чебышева

Непрямые методы синтеза ЦФ

Метод инвариантности импульсной характеристики

$$h(kT_Д)=H(kT_Д)\ ;\ k=1,2,\dots$$

Задана

$$K(p)=\frac{a_0+a_1p+\dots+a_mp^m}{b_0+b_1p+\dots+b_lp^l},\ m<l$$

$$K(p)=\sum_{i=1}^{l}\frac{A_i}{(p-p_i)}$$

$$H(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{K(p)\right\}=\sum_{i=1}^{l}A_ie^{p_it},\ (r_i=1)$$

$$h(kT_Д)=H(kT_Д)=\sum_{i=1}^{l}A_ie^{p_ikT_Д}$$

$$K(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{l}A_ie^{p_ikT_Д}z^{-k}=$$

$$=\sum_{i=1}^{l}\frac{A_i}{1-e^{p_iT_Д}z^{-1}}$$

$$\frac{A_i}{p-p_i}\Longrightarrow\frac{A_i}{1-e^{p_iT_Д}z^{-1}}$$

Для $r_i > 1$

$$\sum_{\mu=0}^{r_i-1} \frac{A_{i\mu} p^{\mu}}{(p-p_i)^{r_i}} \Longrightarrow$$

$$\sum_{\mu=0}^{r_i-1} \frac{A'_{i\mu}}{\mu!} \frac{\partial^{\mu}}{\partial p^{\mu}} \left(\frac{1}{1-e^{pT_Д}} \right) \Bigg|_{p=p_i}$$

Пример синтеза ЦФ

$$K(p) = \frac{\alpha}{p^2+\beta^2}$$

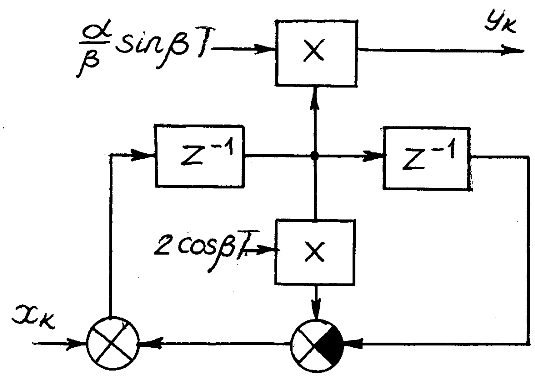
$$K(p) = \frac{A}{p-j\beta} + \frac{B}{p+j\beta}$$

$$A = -j\frac{\alpha}{2\beta}\ ; \quad B = j\frac{\alpha}{2\beta}$$

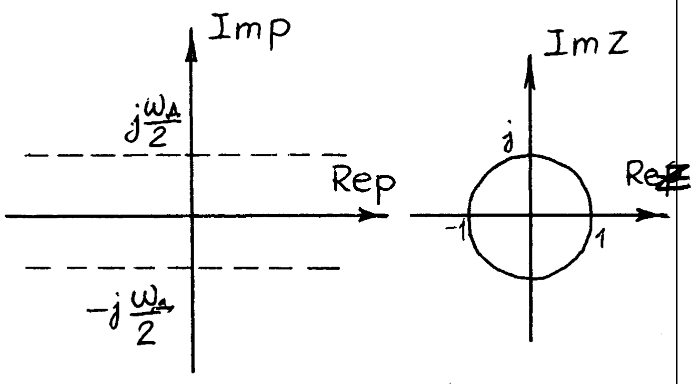
$$K(z) = \frac{-j\frac{\alpha}{2\beta}}{1-e^{j\beta T}z^{-1}} + \frac{j\frac{\alpha}{2\beta}}{1-e^{-j\beta T}z^{-1}}$$

$$e^{j\beta T} = \cos\beta T + j\sin\beta T$$

$$K(z) = \frac{\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta T z^{-1}}{1-2\cos\beta T z^{-1} + z^{-2}}$$



Метод билинейного z-преобраз.



$$p = \frac{2}{T_Д}\,\mathrm{th}\,\frac{p'T_Д}{2} = \frac{2}{T_Д}\left(\frac{1-e^{-p'T_Д}}{1+e^{-p'T_Д}}\right) =$$

$$= \frac{2}{T_Д}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

$$z = \frac{1+\frac{T_Д}{2}p}{1-\frac{T_Д}{2}p} \to \frac{1+\frac{T_Д}{2}j\omega}{1-\frac{T_Д}{2}j\omega} = 1\cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

искажение частотной шкалы:

$$p = j\omega_н \qquad p' = j\omega_ц$$

$$\omega_н = \frac{2}{T_Д}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega_ц T_Д}{2}\right)$$

Последовательность расчета

1. По характерным точкам требуемой ЧХ ЦФ находим точки ЧХ АФ
   $$\omega_{цi} \to \omega_{нi}$$
2. Находится $K(p)$ АФ по $\omega_{нi}$
3. Осуществляется замена
   $$p = \frac{2}{T_Д}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$
4. $K(z)$ преобразуется в желаемую форму

Метод подстановки операторов интегрирования (метод z-форм)

$$K(p) = \frac{a_0 p^{-\ell} + a_1 p^{1-\ell} + \dots + a_m p^{m-\ell}}{b_0 p^{-\ell} + b_1 p^{1-\ell} + \dots + b_\ell}$$

$$z = e^{pT_Д} \; ; \quad p^{-1} = \frac{T_Д}{\ln z}$$

$$\ln z = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \dots\right)$$

$$u = \frac{z-1}{z+1} \; ; \quad p^{-1} \approx \frac{T_Д}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$p^{-2} = \frac{T_Д^2}{(\ln z)^2} \approx \frac{T_Д^2(1+10z^{-1}+z^{-2})}{12\,(1-z^{-1})^2}$$

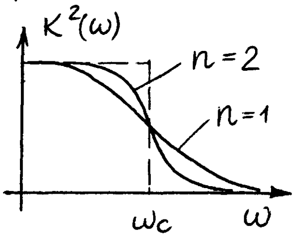
$$p^{-3} \approx \frac{T_Д^3\,[z^{-1}(1+z^{-1})]}{2\,(1-z^{-1})^3}$$

Синтез ЦФ по квадрату АЧХ

Классификация ФНЧ по квадр. АЧХ

1. Фильтр Баттерворта

$$K^2(\omega) = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$



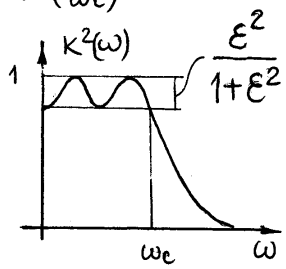
2. Фильтр Чебышева I типа

$$K^2(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

$T_1(x) = x$

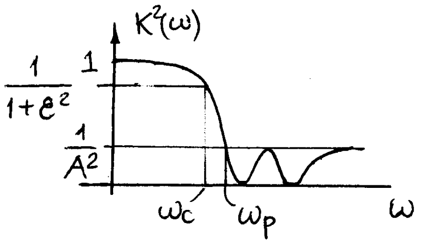
$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$



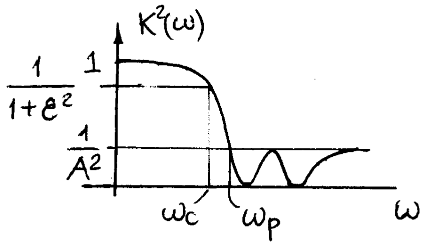
3. Фильтр Чебышева II типа

$$K^2(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2\left[T_n\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right) \Big/ T_n\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)\right]}$$



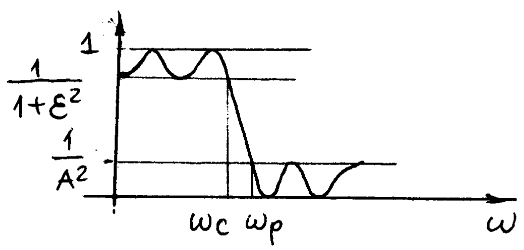
3. Фильтр Чебышева II типа

$$K^2(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2\left[T_n\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right) \Big/ T_n\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)\right]}$$



4. Эллиптический фильтр

$$K^2(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}, m\right)}$$



Условия точного соответствия АЧХ непрерывного и ЦФ

1) $|K(j\omega)|^2$ – рациональная функция $e^{j\omega T} = z$

2) Возможно представление

$$|K(j\omega)|^2 = K(j\omega)\,K(-j\omega) \quad \text{или}$$

$$|K(z)|^2 = K(z)\,K(z^{-1})$$

$K^2(\omega)$ — рациональная функция от функций

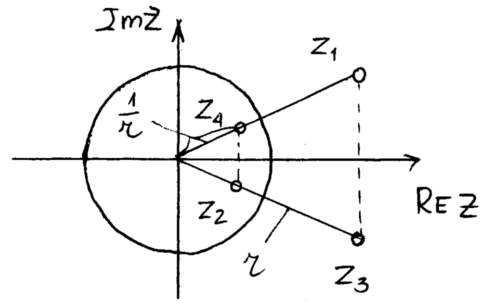
$$\sin^2\frac{\omega T}{2}=\frac{(e^{j\omega T}-1)^2}{-4e^{j\omega T}}=\frac{(z-1)^2}{-4z}$$

$$\cos^2\frac{\omega T}{2}=\frac{(z+1)^2}{4z};$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\omega T}{2}=-\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}$$

$$z_1=r e^{j\varphi}\rightarrow z_2=z_1^{-1}=\frac{1}{r}e^{-j\varphi}$$

$$z_3=z_1^{*}=r e^{-j\varphi};\quad z_4=z_2^{*}=\frac{1}{r}e^{j\varphi}$$



Порядок расчета ЦФ по квадрату АЧХ

1. Выбираем тип АЧХ, находим порядок ЦФ и коэффициенты полиномов $K^2(\omega)$
2. Заменяем квадраты тригонометр. функций выражениями через z
3. Находим нули и полюса $|K(z)|^2$
4. Устанавливаем соответствие особых точек $z_i=re^{j\varphi}$ точкам $z_k=\frac{1}{r}e^{j\varphi}$ и отбрасываем те из них, которые лежат вне единичного круга, а также точки $z_i=0$

Преобразования Константинидиса

ФНЧ → ФВЧ: $z^{-1}\rightarrow -\dfrac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$

$$\alpha=-\frac{\cos[(\Omega_c-\omega_c)T/2]}{\cos[(\Omega_c+\omega_c)T/2]}$$

ФНЧ → полосовой $z^{-1}\rightarrow$

$$\frac{z^{-2}-\dfrac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\dfrac{k-1}{k+1}}{\dfrac{k-1}{k+1}z^{-2}-\dfrac{2\alpha}{k+1}z^{-1}+1}$$

$$\alpha=\frac{\cos[(\omega_{c2}+\omega_{c1})T/2]}{\cos[(\omega_{c2}-\omega_{c1})T/2]}$$

$$K=\mathrm{tg}(\Omega_c T/2)\,\mathrm{ctg}[(\omega_{c2}-\omega_{c1})T/2]$$

Пример

Рассчитать ЦФ Баттерворта для

$f_c = 1250$ гц (затухание 3 дБ)

$f_p = 2000$ гц (затухание 20 дБ)

$f_д = 10\,000$ гц

$$|K(j\omega)|^2=\frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{tg}^{2n}\frac{\omega T_д}{2}}{\mathrm{tg}^{2n}\frac{\omega_c T_д}{2}}}$$

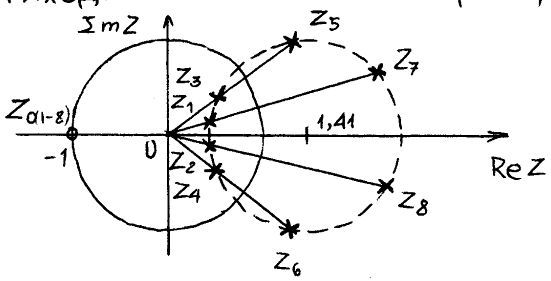
Из условия $|K(j\omega_p)|^2=0{,}01$ находим $n=4$

Заменяем

$$\mathrm{tg}^2\frac{\omega T_д}{2}=\frac{-(z-1)^2}{(z+1)^2}$$

$$|K(z)|^2=\frac{\mathrm{tg}^8\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\mathrm{tg}^8\left(\frac{\pi}{8}\right)+\dfrac{(z-1)^8}{(z+1)^8}}$$

Находим нули и полюса $|K(z)|^2$



$Z_{0\,1-4} = -1$

$Z_{p\,1,2} = 0{,}42 \pm j0{,}17$

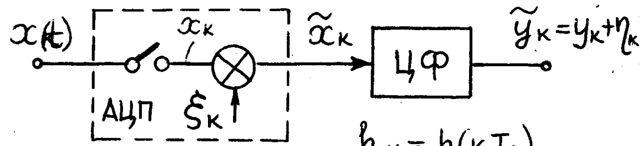
$Z_{p\,3,4} = 0{,}55 \pm j0{,}54$

$$K(z) = \frac{(z+1)^4}{(z^2-0{,}84z+0{,}2)(z^2-1{,}1z+0{,}59)} =$$

$$= \frac{(z^{-1}+1)^2}{(1-0{,}84z^{-1}+0{,}2z^{-2})}\,\frac{(z^{-1}+1)^2}{(1-1{,}1z^{-1}+0{,}59z^{-2})}$$

Эффекты квантования в ЦФ

1. Ошибки квантования входного процесса
2. Ошибки округления результатов арифметических операций
3. Ошибки неточного задания коэффициентов фильтра



$h_к = h(кT_Д)$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\Delta x^2}{12}$$

$$M(\xi_{к-i}\xi_{к-j}) = \begin{cases} \sigma_\xi^2, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

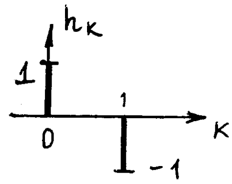
$$\sigma_\eta^2(к) = M\left(\sum_{i=0}^{\infty} h_i \xi_{к-i}\right)^2 =$$

$$= M\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} h_i h_j \xi_{к-i}\xi_{к-j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} h_i h_j M(\xi_{к-i}\xi_{к-j})$$

$$\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} h_i^2$$

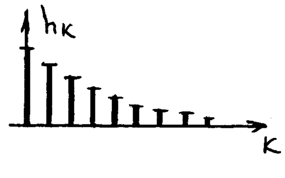
Пример: ЧПК-1



$$\sigma_\eta^2 = 2\sigma_\xi^2 = \frac{1}{6}\Delta x^2$$

Пример: рециркулятор: $h_к = b^к$

$0 < b < 1$

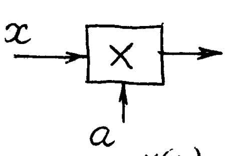


$$\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} b^{2к} = \frac{\Delta x^2}{12}\,\frac{1}{1-b^2}$$

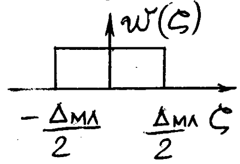
при $b = 0{,}99$

$$\sigma_\eta^2 = \frac{\Delta x^2}{12}\cdot\frac{1}{1-0{,}98} = 4\Delta x^2$$

Ошибки округления результатов



$\widetilde{ax} = ax + \zeta$



$$\sigma_\zeta^2 = \frac{\Delta_{мл}^2}{12}$$