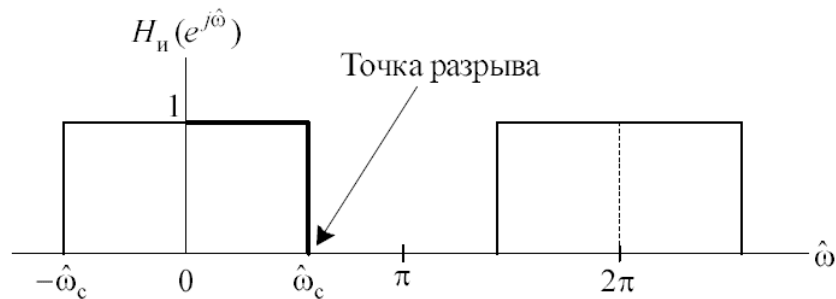


## Синтез КИХ-фильтров методом окон

Идеальная АЧХ фильтра НЧ:

$$A_{\text{н}}(\hat{\omega}) = H_{\text{н}}(e^{j\hat{\omega}}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_c; \\ 0, & \text{при других } \hat{\omega}, \end{cases} \quad (1)$$



Представление частотной характеристики рядом Фурье:

$$H_{\text{н}}(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\text{н}}(n)e^{-j\omega T n}, \quad (2)$$

где 
$$h_{\text{н}}(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H_{\text{н}}(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega.$$

Усекаем ряд (2) «окном»  $h(n) = w_R(n)h_{\text{н}}(n)$ ,

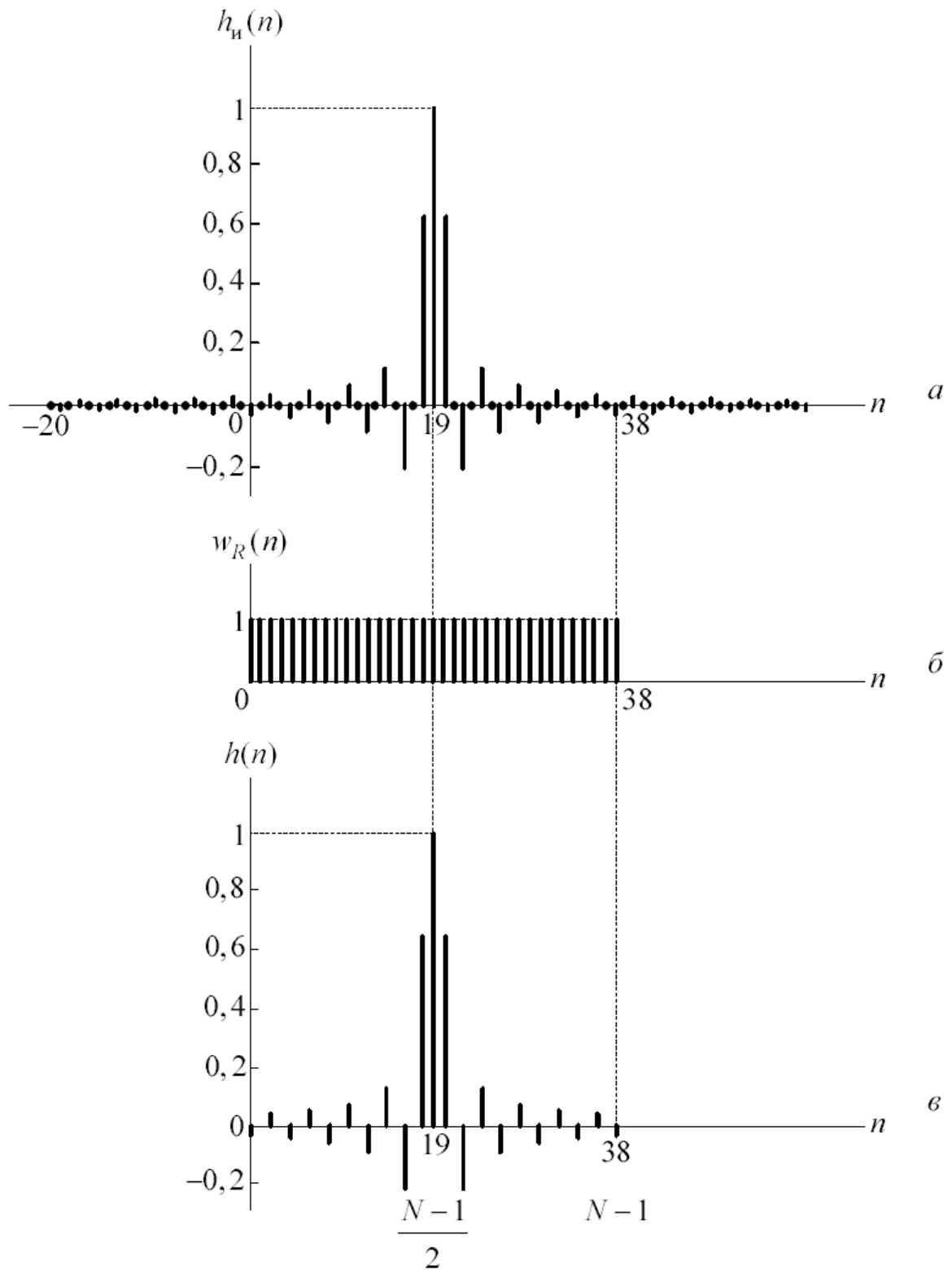
$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Тогда частотная характеристика

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega T n}. \quad (3)$$

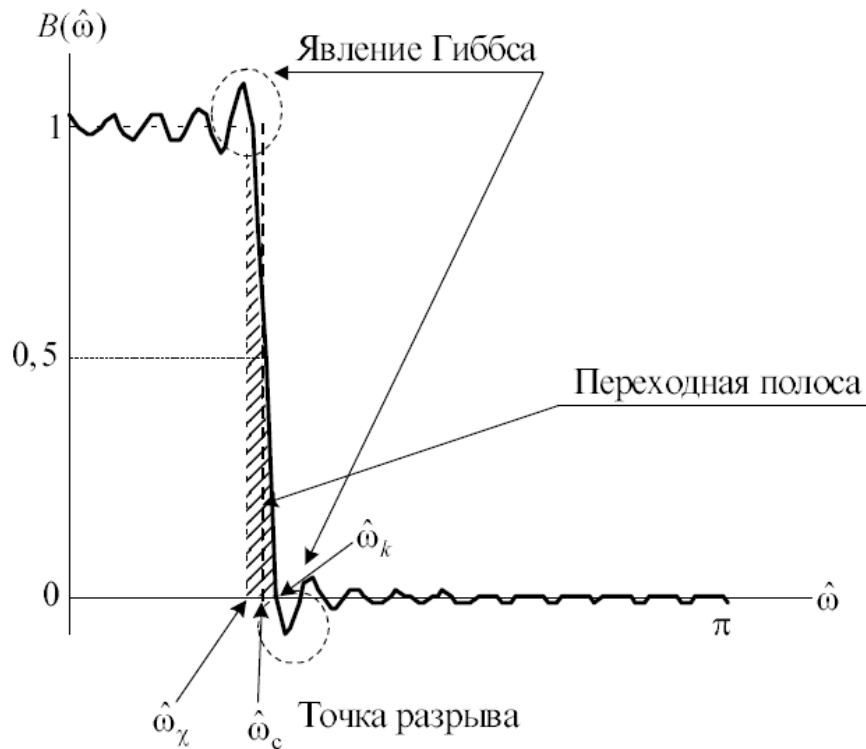
Подстановкой  $e^{j\omega T} = z$  получаем передаточную функцию

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}.$$



### Эффект Гиббса

Сходимость ряда (2) в точке разрыва  $\hat{\omega}_c$  неравномерная и проявляется в пульсациях с амплитудой примерно 9% от значения АЧХ в полосе пропускания независимо от величины  $N$ :



Частотная характеристика прямоугольного окна

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_R(n) e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\hat{\omega}n}.$$

Сумма первых  $N$  членов геометрической прогрессии

$$S_N = a_0 \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

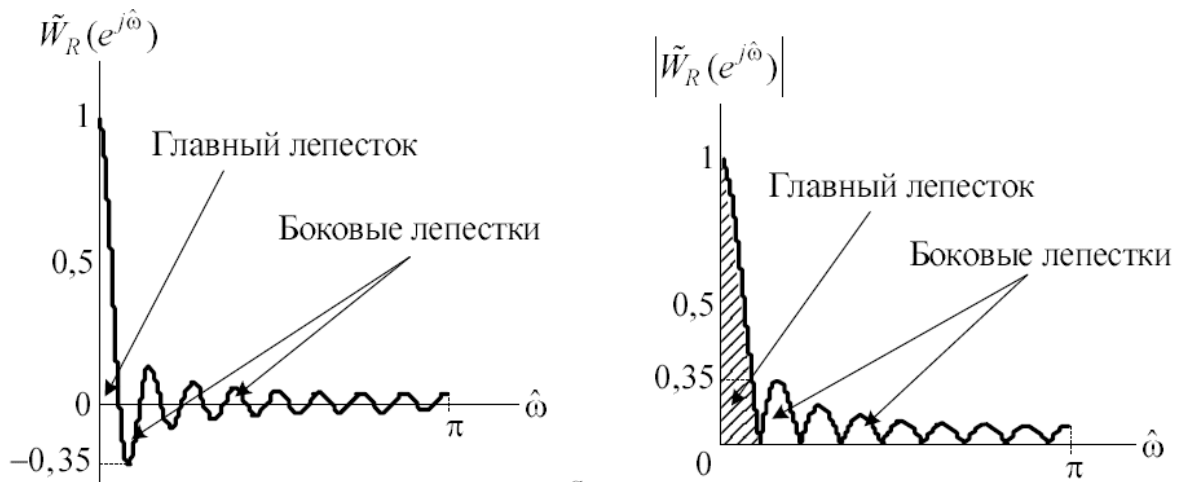
Тогда

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = 1 \frac{1 - e^{-j\hat{\omega}N}}{1 - e^{-j\hat{\omega}}} = \frac{e^{-j\hat{\omega}N/2} (e^{j\hat{\omega}N/2} - e^{-j\hat{\omega}N/2})}{e^{-j\hat{\omega}/2} (e^{j\hat{\omega}/2} - e^{-j\hat{\omega}/2})}$$

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-j(N-1)\hat{\omega}/2} \frac{\sin\left(\frac{\hat{\omega}N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)}. \quad (4)$$

Амплитудный множитель функции Дирихле

$$\tilde{W}_R(e^{j\hat{\omega}}) = \sin\left(\frac{\hat{\omega}N}{2}\right) / \sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)$$



Умножению функций  $h(n) = w_R(n)h_{\text{н}}(n)$ , соответствует комплексная свертка их частотных характеристик на интервале  $[-\pi, \pi]$

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\text{н}}(e^{j\varphi}) W_R(e^{j(\hat{\omega}-\varphi)}) d\varphi.$$

### Управление сходимостью ряда Фурье с помощью окон

Импульсная характеристика фильтра с учетом весовых коэффициентов

$$h(n) = h_{\text{н}}(n) w(n)$$

Передаточная функция фильтра

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h_{\text{н}}(n) w(n) z^{-n},$$

Окно – симметричная функция, заданная на интервале  $0 \dots N-1$  :

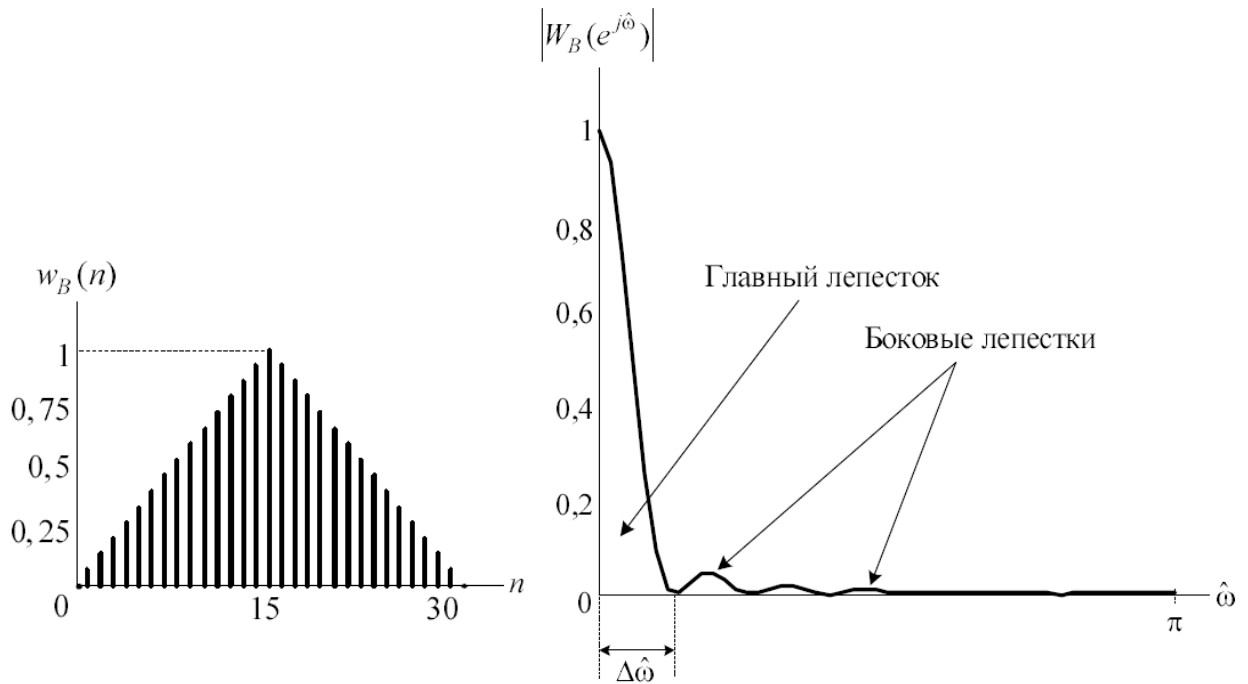
$$w(n) = \begin{cases} w(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

1. Прямоугольное окно (окно Дирихле)

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{при других } n \end{cases}$$

## 2. Треугольное окно (окно Бартлетта)

$$w_T(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & n = 0, \dots, \frac{N-1}{2}; \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & n = \frac{N-1}{2}, \dots, N-1; \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$



$$W_T(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{2}{N} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\hat{\omega}} \left[ \frac{\sin(N\hat{\omega}/4)}{\sin(\hat{\omega}/2)} \right]^2$$

## 3. Обобщенное косинусное окно

$$w_H(n) = \begin{cases} a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{N-1}n + a_2 \cos \frac{4\pi}{N-1}n; & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Окна	Параметры		
	$a_0$	$a_1$	$a_2$
Хэннинга	0,5	-0,5	0
Хэмминга	0,54	-0,46	0
Блэкмана-Хэрриса	0,42	-0,5	0,08

## Частотная характеристика обобщенного косинусного окна

$$W_H(e^{j\hat{\omega}}) = a_0 W_R(e^{j\hat{\omega}}) + \frac{a_1}{2} W_R\left(e^{j\left(\hat{\omega} - \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right) + \frac{a_1}{2} W_R\left(e^{j\left(\hat{\omega} + \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right) + \frac{a_2}{2} W_R\left(e^{j\left(\hat{\omega} - \frac{4\pi}{N-1}\right)}\right) + \frac{a_2}{2} W_R\left(e^{j\left(\hat{\omega} + \frac{4\pi}{N-1}\right)}\right).$$

## Коэффициент пульсаций

$$k_{\text{п}} = \frac{\text{Амплитуда первого бокового лепестка}}{\text{Амплитуда главного лепестка}} 100 \text{ \%}.$$

Тип окна	Ширина главного лепестка	Максимальный уровень бок. лепестков, дБ	Коэффициент пульсаций $k_{\text{п}}(N)$ , %		
			$N = 11$	$N = 21$	$N = 31$
Прямоугольное	$2\pi/N$	-13	22,34	21,89	21,80
Хэннинга	$4\pi/N$	-35	2,62	2,67	2,67
Хэмминга	$4\pi/N$	-43	1,47	0,93	0,82
Блэкмана-Хэрриса	$6\pi/N$	-67	0,08	0,12	0,12

## 4. Окно Кайзера

$$w_K(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left(\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\alpha)}, & |n| \leq \frac{N-1}{2}; \\ 0, & |n| > \frac{N-1}{2}, \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0,1102(a_{\min} - 8,7), & a_{\min} > 50; \\ 0,5842(a_{\min} - 21)^{0,4} + 0,07886(a_{\min} - 21), & 21 < a_{\min} < 50; \\ 0, & a_{\min} < 21. \end{cases}$$

$a_{\min} = -20 \lg \delta$  – уровень пульсаций АЧХ в полосе задерживания

Затухание в полосе задерживания $a_{\min}$ , дБ	Параметр $\alpha$	$D$ -фактор $D = (N - 1) \cdot \Delta F$	Затухание в полосе пропускания $a_{\max}$ , дБ
30	2,117	1,536	0,27
40	3,395	1,884	0,0864
50	4,551	2,928	0,0274
60	5,653	3,625	0,00868
70	6,755	4,321	0,00275
80	7,857	5,017	0,000868
90	8,959	5,714	0,000275
100	10,061	6,410	0,000087

Частотная характеристика окна Кайзера

$$W_K(\hat{f}) = \frac{(N-1) \cdot \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\alpha^2 - \left( \frac{N-1}{2} \hat{f} \right)^2} \right]}{\alpha I_0(\alpha) \sqrt{\alpha^2 - \left( \frac{N-1}{2} \hat{f} \right)^2}},$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Порядок расчета коэффициентов КИХ-фильтра методом окон

1. Задание требований К ЦФ (частота дискретизации, частоты среза и отсечки, допустимые пульсации в полосах пропускания и задерживания)
2. Вычисление импульсной характеристики (ИХ) идеального фильтра. Для фильтров с одной полосой пропускания или задерживания ИХ приведены в таблице, где  $n$  – количество коэффициентов;  $f_c$  – центральная частота переходной зоны от пропускания к подавлению,  $f_k$  и  $f_\chi$  – частоты среза и отсечки,  $f_d$  – частота дискретизации.

Тип фильтра	Импульсная характеристика		Примечание
	$h(n)$	$h(0)$	
ФНЧ	$\frac{\sin 2\pi\hat{f}_c n}{n\pi}$	$2\hat{f}_c$	$\hat{f}_c = \frac{f_k + f_{\lambda}}{2f_d}$
ФВЧ	$-\frac{\sin 2\pi\hat{f}_c n}{n\pi}$	$1 - 2\hat{f}_c$	
ПФ	$\frac{\sin 2\pi n\hat{f}_{c_2} - \sin 2\pi n\hat{f}_{c_1}}{n\pi}$	$2(\hat{f}_{c_2} - \hat{f}_{c_1})$	$\hat{f}_{c_1} = \frac{f_{-k} + f_{-\lambda}}{2f_d};$
РФ	$\frac{\sin 2\pi n\hat{f}_{c_1} - \sin 2\pi n\hat{f}_{c_2}}{n\pi}$	$1 - 2(\hat{f}_{c_1} - \hat{f}_{c_2})$	$\hat{f}_{c_2} = \frac{f_k + f_{\lambda}}{2f_d}$

3. Выбор окна и длины фильтра  $N$  в зависимости от требуемой ширины переходной зоны и неравномерности (пульсаций) в полосах пропускания и задерживания.
4. Расчет импульсной характеристики реального фильтра  

$$h(n) = h_{\text{и}}(n) w(n)$$
5. Проверка выполнения заданных требований

## КИХ-фильтры с линейной ФЧХ

КИХ-фильтр описывается следующей передаточной функцией:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}.$$

Особенности КИХ-фильтров:

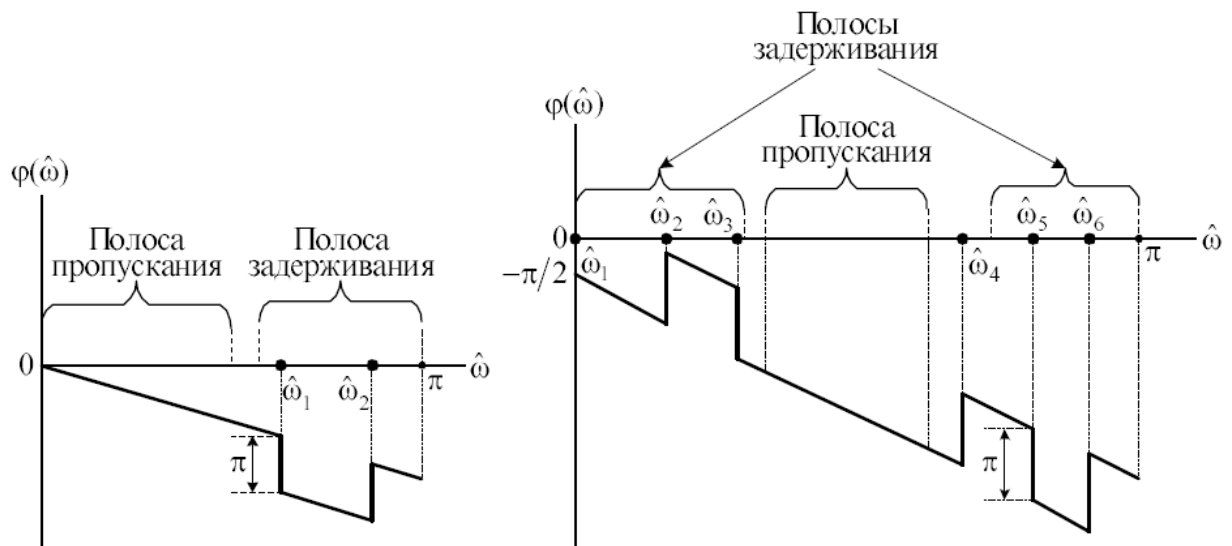
- возможностью обеспечить строго линейную ФЧХ (с точностью до скачков на  $\pi$ );
- устойчивостью по определению.

Линейная (с точностью до скачков на  $\pi$ ) ФЧХ (ЛФЧХ) КИХ-фильтра обеспечивается в том и только том случае, если для его импульсной характеристики  $h(n)$  выполняется одно из двух условий:



- симметрии:  $h(n) = h(N-1-n)$ ;
- антисимметрии:  $h(n) = -h(N-1-n)$ .

Примеры ФЧХ фильтра НЧ и полосового фильтра



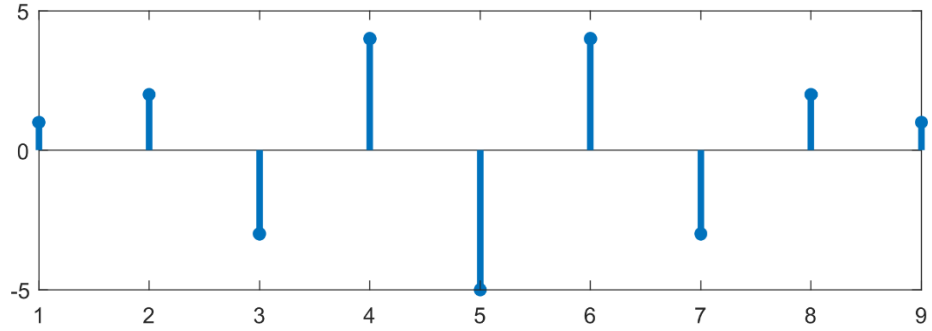
По признакам симметрии/антисимметрии ИХ  $h(n)$  и нечетности/четности длины  $N$  различают четыре типа КИХ-фильтров с линейной ФЧХ (ЛФЧХ), представленные в таблице.

Тип КИХ-фильтра	ЛФЧХ (с точностью до скачков на $\pi$ )	ЦФ
Тип 1 (Type-1): длина $N$ — нечетная; порядок $R$ — четный; $h(n)$ — симметричная	$\varphi(\hat{\omega}) = -(\hat{\omega} R)/2$	ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ
Тип 2 (Type-2): длина $N$ — четная; порядок $R$ — нечетный; $h(n)$ — симметричная	$\varphi(\hat{\omega}) = -(\hat{\omega} R)/2$	ФНЧ, ПФ
Тип 3 (Type-3): длина $N$ — нечетная; порядок $R$ — четный; $h(n)$ — антисимметричная, $h(R/2)=0$	$\varphi(\hat{\omega}) = (\pi/2) - ((\hat{\omega} R)/2)$	ПФ ЦПГ ЦД
Тип 4 (Type-4): длина $N$ — четная; порядок $R$ — нечетный; $h(n)$ — антисимметричная	$\varphi(\hat{\omega}) = (\pi/2) - ((\hat{\omega} R)/2)$	ФВЧ, ПФ ЦПГ ЦД

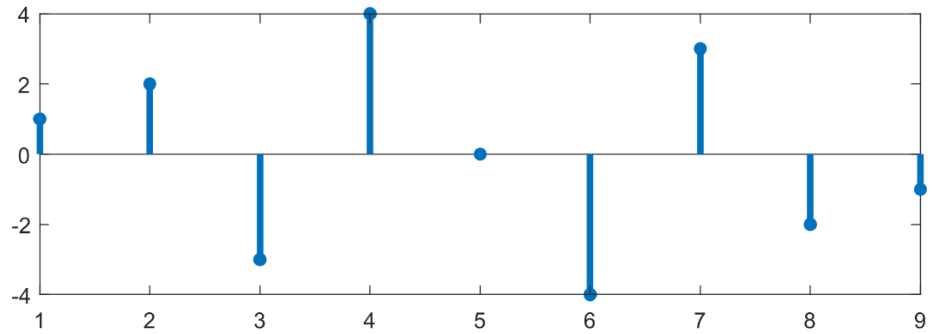
ЦПГ – цифровой преобразователь Гильберта,

ЦД – цифровой дифференциатор

Графики импульсных характеристик фильтров

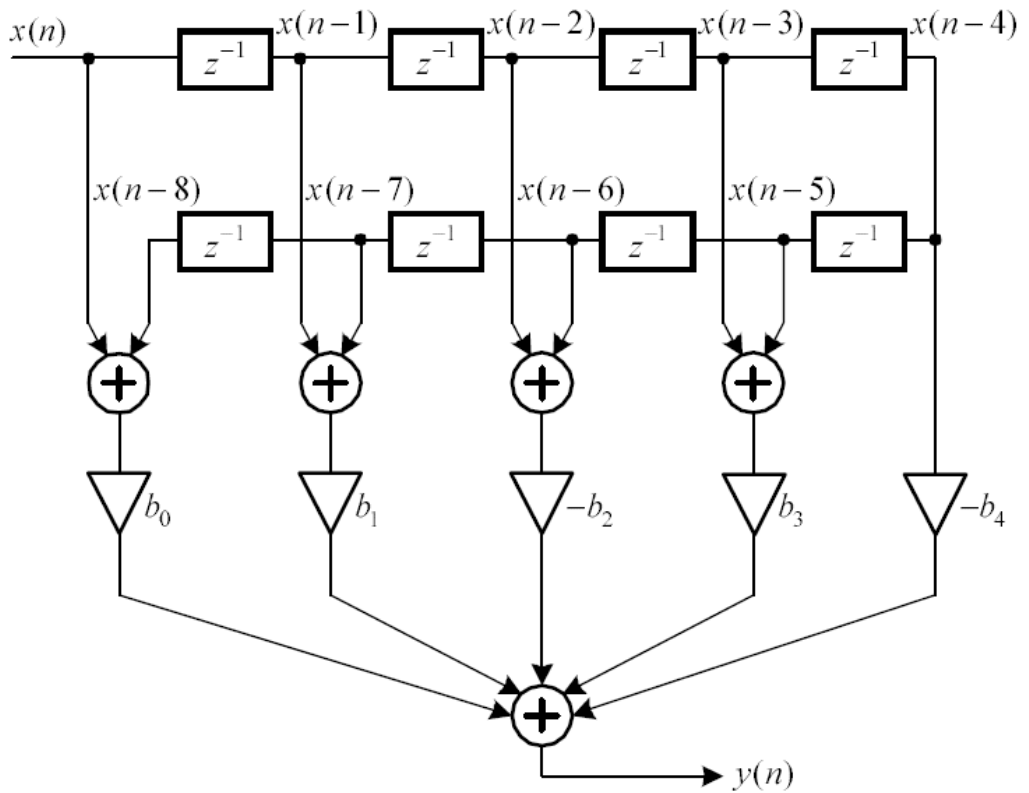


Тип 1



Тип 3

Структурная схема КИХ-фильтра 8-го порядка типа 1



Частотная характеристика КИХ-фильтра в общем виде

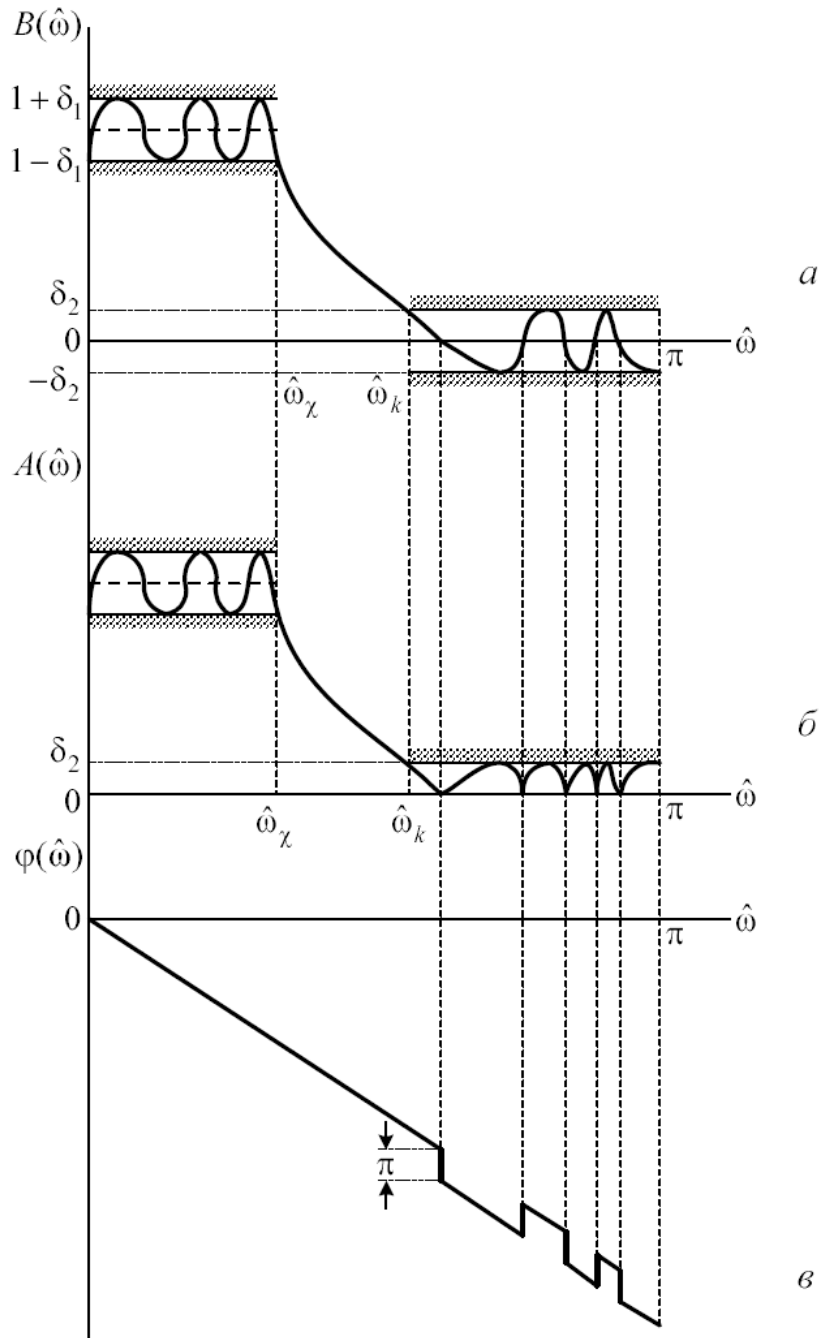
$$H(e^{j\hat{\omega}}) = B(e^{j\hat{\omega}}) e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\hat{\omega} - m\frac{\pi}{2}\right)} = B(\hat{\omega}) e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\hat{\omega} - m\frac{\pi}{2}\right)},$$

$B(e^{j\hat{\omega}}) = B(\hat{\omega})$  – амплитудная функция;

$m = 0$  для фильтров с симметричной ФЧХ,

$m = 1$  – для фильтров с антисимметричной ФЧХ

АЧХ фильтра  $A(\hat{\omega}) = |H(e^{j\hat{\omega}})| = |B(\hat{\omega})|$



Амплитудная функция (а), АЧХ (б), ФЧХ (в)

$$A(\hat{\omega}) = \begin{cases} B(\hat{\omega}) & \text{в полосе пропускания;} \\ |B(\hat{\omega})| & \text{в полосе задерживания.} \end{cases}$$

Амплитудную функцию представляем с помощью тригонометрического полинома

$$B_1(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} 2b_k \cos \left[ \hat{\omega} \left( \frac{N-1}{2} - k \right) \right] = \sum_{k=0}^M a_k \cos \varphi_k(\hat{\omega}) = B_1(\hat{\omega}, \bar{a}),$$

$a_k = 2b_k = 2h_k$  – коэффициенты полинома;

$M = \frac{N-1}{2}$  — порядок полинома  $B(\hat{\omega}, \bar{a})$ .

Коэффициенты фильтра

$$\begin{cases} b_i = b_{N-1-i} = a_k / 2, \quad i = k & \text{– для фильтров типов 1 и 2;} \\ b_i = a_k / 2, \quad b_{N-1-i} = -b_i, \quad i = k & \text{– для фильтров типов 3 и 4.} \end{cases}$$