Вейвлеты Добеши

Многие полезные математические функции можно записать в явном виде. В этом смысле самой простой функцией, по-видимому, является многочлен. Однако имеется также большое число важных функций, которые задаются рекурсивно, то есть, через самих себя. Вы можете сказать, что если определять что-то через себя самого, то возникнет противоречие. Но этого легко избежать, если рекурсивное определение будет состоять из нескольких частей, причем одна из частей будет иметь явное выражение. Эта часть, обычно, содержит начальное задание определяемой функции. Простейшим примером может служить функция факториал. Ее можно задать явной формулой

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1,$$

а можно определить с помощью двух равенств вида

$$1! = 1,\ n! = n\cdot(n-1)!$$

Ингрид Добеши (Ingrid Daubechies) ввела вейвлет ψ и функцию шкалы (строительный блок) φ следующим образом. Одно требование состояло в том, чтобы функция шкалы φ имела компактный носитель. Она должна равняться нулю вне конечного отрезка. Добеши выбрала в качестве носителя отрезок $[0,3]$. Она доказала, что эту функцию нельзя выразить через известные элементарные функции: многочлены, тригонометрические или степенные функции. Она также показала, что φ можно построить рекурсивно, с помощью некоторого начального задания и рекурсивного правила. Она выбрала следующие начальные значения:

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \varphi(2) = \frac{1-\sqrt{3}}{2},\ \varphi(3) = 0,$$

и задала рекурсивное соотношение

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \frac{1+\sqrt{3}}{4}\varphi(2r) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\varphi(2r-1) + \frac{3-\sqrt{3}}{4}\varphi(2r-2) + \\
&+ \frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(2r-3) = \\
&= h_0\varphi(2r)+h_1\varphi(2r-1)+h_2\varphi(2r-2)+h_3\varphi(2r-3) = \\
&= (h_0,h_1,h_2,h_3)\cdot(\varphi(2r),\varphi(2r-1),\varphi(2r-2),\varphi(2r-3))\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Отметим, что сумма начальных значений равна 1:

$$\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3) = 0 + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} + 0 = 1.$$

Дальнейшее вычисление значений функции φ совершается по шагам. На шаге 1 применяется условие компактного носителя, четыре начальные значения и рекурсивное соотношение (1) для вычисления значений $\varphi(r)$ в трех новых точках $r = 0.5$, 1.5 и 2.5.

$$\begin{aligned}
\varphi(1/2) &= h_0\varphi(2/2)+h_1\varphi(2/2-1)+h_2\varphi(2/2-2)+h_3\varphi(2/2-3)= \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}+h_1\cdot 0+h_2\cdot 0+h_3\cdot 0=\frac{2+\sqrt{3}}{4}, \\
\varphi(3/2) &= h_0\varphi(6/2)+h_1\varphi(6/2-1)+h_2\varphi(6/2-2)+h_3\varphi(6/2-3)= \\
&= h_0\cdot 0+\frac{1+\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}+h_3\cdot 0=0, \\
\varphi(5/2) &= h_0\varphi(5)+h_1\varphi(5-1)+h_2\varphi(5-2)+h_3\varphi(5-3)= \\
&= h_0\cdot 0+h_1\cdot 0+h_2\cdot 0+\frac{1-\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Теперь значения функции $\varphi(r)$ известны в четырех начальных точках 0, 1, 2, 3 и в трех промежуточных средних точках 0.5, 1.5 и 2.5, то есть, всего 7 значений. На шаге 2 можно вычислить еще 6 значений этой функции в точках 1/4, 3/4, 5/4, 7/4, 9/4, 11/4. В результате получаются числа

$$\frac{5+3\sqrt{3}}{16},\ \frac{9+5\sqrt{3}}{16},\ \frac{1+\sqrt{3}}{8},\ \frac{1-\sqrt{3}}{8},\ \frac{9-5\sqrt{3}}{16},\ \frac{5-3\sqrt{3}}{16}.$$

Итак, уже вычислены значения $\varphi(r)$ в 4 + 3 +6 = 13 точках (рис. 1).

Шаг 3 даст еще 12 значений в точках посередине между 13 уже вычисленными точками. Получим всего 12+13 = 25 чисел. Следующие шаги дадут 24, 48, 96 и так далее значений. После шага n значения функции $\varphi(r)$ будут уже известны в $4 + 3 + 6 + 12 + 24 +\ldots+ 3 \cdot 2^n =$ $= 4 + 3\,(2^{n+1}-1)$ точках. Например, после 9 шагов будет известно $4+3\left(2^{10}-1\right)=3073$ значения (рис. 2).

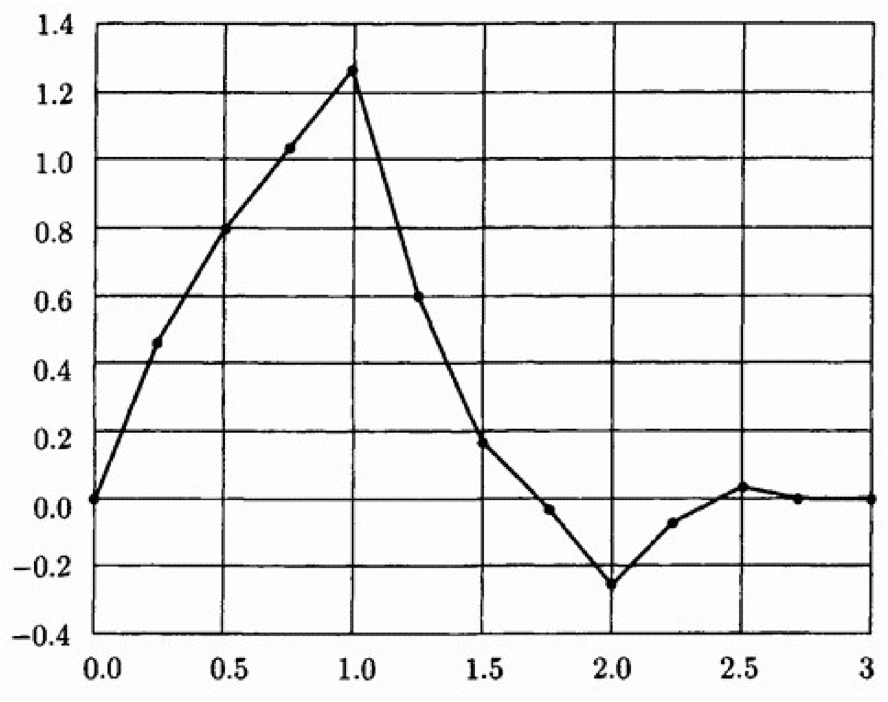

Рис. 1. Функция шкалы Добеши $\varphi(r)$ в 13 точках.

Функция φ служит строительным блоком для построения вейвлета Добеши ψ, который задается также рекурсивно с помощью формулы

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= -\frac{1+\sqrt{3}}{4}\varphi(2r-1) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\varphi(2r) - \frac{3-\sqrt{3}}{4}\varphi(2r+1) + \\
&+ \frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(2r+2) = \\
&= -h_0\varphi(2r-1) + h_1\varphi(2r) - h_2\varphi(2r+1) + h_3\varphi(2r+2).
\end{aligned}$$

Коэффициенты h,нормированные числом $\sqrt{2}$, равны:

$$c_0 = \left(1+\sqrt{3}\right) / \left(4\sqrt{2}\right) \approx 0.48296, \quad c_1 = \left(3+\sqrt{3}\right) / \left(4\sqrt{2}\right) \approx 0.8365,$$
$$c_2 = \left(3-\sqrt{3}\right) / \left(4\sqrt{2}\right) \approx 0.2241, \quad c_3 = \left(1-\sqrt{3}\right) / \left(4\sqrt{2}\right) \approx 0.1294.$$

Для вейвлета Добеши 6-го порядка эти коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \left(1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right) / \left(16\sqrt{2}\right) \approx .3326, \\
c_1 &= \left(5+\sqrt{10}+3\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right) / \left(16\sqrt{2}\right) \approx .8068, \\
c_2 &= \left(10-2\sqrt{10}+2\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right) / \left(16\sqrt{2}\right) \approx .4598, \\
c_3 &= \left(10-2\sqrt{10}-2\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right) / \left(16\sqrt{2}\right) \approx -.1350, \\
c_4 &= \left(5+\sqrt{10}-3\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right) / \left(16\sqrt{2}\right) \approx -.0854, \\
c_5 &= \left(1+\sqrt{10}-\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right) / \left(16\sqrt{2}\right) \approx .0352.
\end{aligned}$$

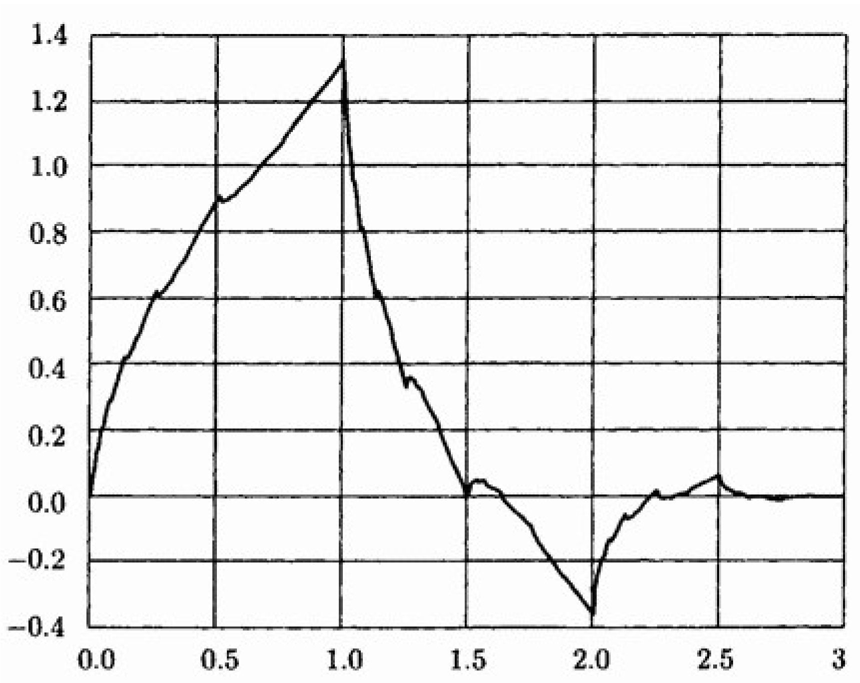

Рис. 2. Функция шкалы Добеши φ в 3073 точках.

Напомним, что функция $\varphi(r)$ не равна нулю только на интервале $[0,3]$. Поэтому носитель функции $\psi(r)$ принадлежит отрезку $[-1,2]$. Функцию ψ можно задать рекурсивно подобно функции φ. На рис. 3 показаны значения этого вейвлета в 3073 точках.

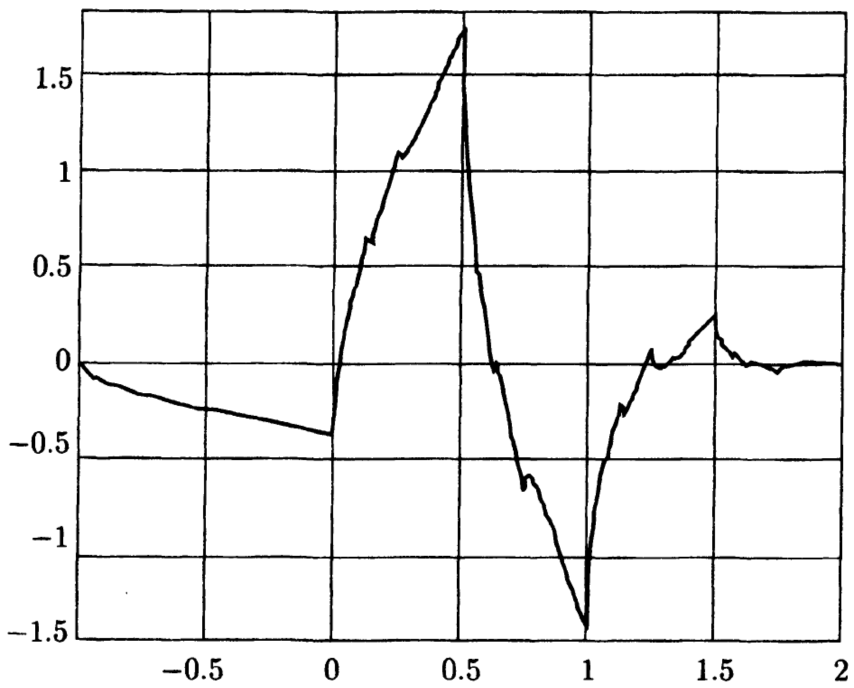

Рис. 2. Вейвлет Добеши ψ в 3073 точках.