Лекция 20

Синтез оптимальных (по Чебышеву) КИХ-фильтров

Как было отмечено в предыдущей лекции, простота расчета коэффициентов передаточной функции методом окон сопряжена с получением фильтров высоких порядков даже при умеренных требованиях к АЧХ с размыванием переходной массы, ширина которой полностью зависит от выбранного окна. На практике чаще всего требуется не только жестко фиксировать все граничные частоты при обеспечении небольших допустимых отклонений δ_1 и δ_2 АЧХ от 1 и от 0 соответственно, но и получить фильтр (передаточную функцию) *наименьшего порядка*, удовлетворяющий заданным требованиям и ограничениям. Такие фильтры относят к классу оптимальных, а получающиеся при этом решения называют оптимальными. В данной лекции рассматривается методика синтеза подобных фильтров.

20.1. Понятие об оптимальном (по Чебышеву) синтезе фильтров

Конструирование передаточной функции минимального порядка, при котором обеспечивается выполнение всех заданных требований и ограничений означает, что в результате решения поставленной задачи достигается:

- необходимая точность аппроксимации заданной характеристики в соответствии с предъявленными к характеристике требованиями согласно выбранному критерию близости; в случае избирательных фильтров такой характеристикой обычно является АЧХ (или характеристика ослабления);
- выполнение установленных ограничений, таких как:
  - вида ФЧХ (в данной лекции рассматриваются КИХ-фильтры с линейной ФЧХ);
  - соотношения между коэффициентами передаточной функции (симметрии или антисимметрии);

- структуры фильтра;
- физической реализуемости и т. д.

Задачу, решение которой при заданных условиях дает минимальный порядок передаточной функции, называют задачей оптимального синтеза.

20.1.1. Постановка задачи оптимального синтеза

Как и в двух предыдущих лекциях, будем исходить из представления частотной характеристики в виде:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = B(\hat{\omega})e^{j\varphi(\hat{\omega})},$$

где амплитудная функция $B(\hat{\omega})$ всегда положительна в полосе пропускания, но может принимать как положительные, так и отрицательные значения в полосе задерживания; при этом для АЧХ, по определению амплитудной функции (18.27), справедливы соотношения

$$A(\hat{\omega}) = \left|H(e^{j\hat{\omega}})\right| = \left|B(\hat{\omega})\right|,$$

и поэтому можно записать

$$A(\hat{\omega}) = \begin{cases} B(\hat{\omega}) & \text{в полосе пропускания;} \\ \left|B(\hat{\omega})\right| & \text{в полосе задерживания.} \end{cases}$$

Амплитудную функцию частоты (*см. п. 18.1*) удобно представить в форме тригонометрического полинома $B(\hat{\omega}, \overline{a})$. Например, для фильтра типа 1

$$B_1(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} 2b_k \cos\left[\hat{\omega}\left(\frac{N-1}{2} - k\right)\right] = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos\varphi_k(\hat{\omega}) = B_1(\hat{\omega}, \overline{a}), \quad (20.1)$$

где:

$\overline{a}$ — вектор коэффициентов, связывающий амплитудную и передаточную функции соотношением

$$a_k = 2b_k = 2h_k;$$

$M = \dfrac{N-1}{2}$ — порядок полинома $B(\hat{\omega}, \overline{a})$.

Если известны коэффициенты a_k, нетрудно записать передаточную функцию

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i};$$

$$\begin{cases} b_i = b_{N-1-i} = a_k / 2, \;\; i = k & \text{– для фильтров типов 1 и 2;} \\ b_i = a_k / 2, \;\; b_{N-1-i} = -b_i, \;\; i = k & \text{– для фильтров типов 3 и 4.} \end{cases}$$

Таким образом, задача оптимального синтеза состоит в определении такого вектора коэффициентов $\overline{a}$ полинома $B(\hat{\omega}, \overline{a})$, при котором достигается минимальный порядок передаточной функции.

20.1.1.1. Формулировка задачи

Не нарушая общности рассуждений, обратимся к фильтру НЧ типа 1, требования к амплитудной функции $B(\hat{\omega})$ и к АЧХ $A(\hat{\omega})$ которого изображены на рис. 20.1, *а* и *б* соответственно. Области частот $\Omega_1 \in [0, \hat{\omega}_\chi]$ и $\Omega_2 \in [\hat{\omega}_k, \pi]$, в которых заданы требования к АЧХ, будем называть *интервалами аппроксимации*. Переходные полосы к интервалам аппроксимации не относятся, поскольку в них требования к АЧХ не задаются.

По-видимому, для примера рис. 20.1 оптимальным будет такое решение, при котором достигается максимально возможное отклонение $\delta_{\max}$, не превышающее заданную величину δ, при этом порядок передаточной функции окажется минимально возможным. Следовательно, задача оптимального синтеза сводится к получению полинома $B(\hat{\omega}, \overline{a})$ минимального порядка, удовлетворяющего заданным ограничениям так, чтобы $\delta_{\max} \le \delta$. Кроме того, на аппроксимирующий полином $B(\hat{\omega}, \overline{a})$ вводится ограничение: он должен относиться классу тригонометрических полиномов.

Таким образом, в данном случае формулировка задачи состоит в следующем:

Найти полином (20.1) минимального порядка $M_{\min}$, для которого выполняются условия:

$$\left.\begin{array}{ll} 1-\delta_1 \le B(\hat{\omega}, \overline{a}) \le 1+\delta_1, & \hat{\omega} \in \Omega_1; \\ -\delta_2 \le B(\hat{\omega}, \overline{a}) \le \delta_2, & \hat{\omega} \in \Omega_2; \\ \multicolumn{2}{c}{M = \min;} \\ \multicolumn{2}{c}{\overline{a} = \{a_k\}, \;\; k = 0, 1, \ldots, M.} \end{array}\right\} \qquad (20.2)$$

Иначе говоря, целевой функцией (оптимизируемым параметром) является порядок $M_{\min}$ полинома $B(\hat{\omega}, \overline{a})$, или же число коэффициентов N передаточной функции. При этом необходимо вычислить сам вектор коэффициентов $\overline{a} = \{a_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, M_{\min}$), а потому и коэффициенты передаточной функции. В такой формулировке решение задачи неизвестно.

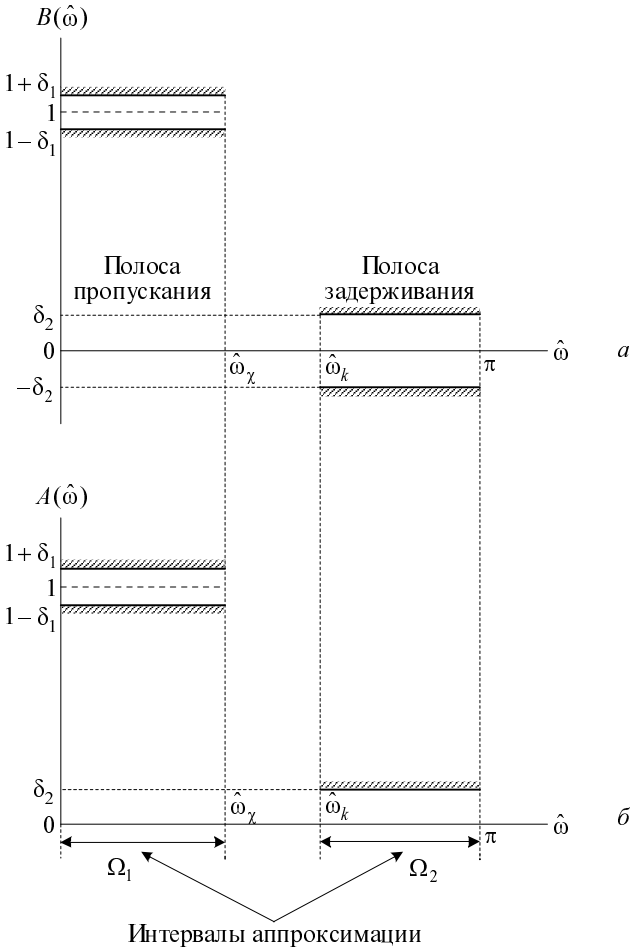


Рис. 20.1. Требования к амплитудной функции (*а*) и АЧХ (*б*) фильтра НЧ

Однако задачу (20.2) можно заменить многократным решением другой, более простой задачи, если поступить следующим образом:

- зафиксировать порядок M (или число коэффициентов N передаточной функции), т. е. целевую функцию задачи (20.2) перевести в параметр;
- перевести отклонение δ в целевую функцию;
- найти вектор коэффициентов $\overline{a}$, обеспечивающий минимум максимального отклонения;
- проверить, удовлетворяет ли полученное решение заданным требованиям к АЧХ.

За некоторое число решений (этапов) при последовательном уменьшении или увеличении параметра M (или N) обязательно найдется такой вектор коэффициентов $\overline{a}$, при котором максимальное значение отклонения δ на совокупности интервалов аппроксимации Ω окажется минимальным и удовлетворит заданным требованиям к АЧХ.

Полученные при этом порядок полинома $B(\hat{\omega}, \overline{a})$ и, следовательно, число коэффициентов передаточной функции $H(z)$ будут оптимальными: M_{opt} и N_{opt} соответственно.

В дальнейшем будет показано, что поскольку полином $B(\hat{\omega}, \overline{a})$ является линейной функцией коэффициентов, *на каждом этапе* потребуется решать систему из некоторого числа m (*см. п. 20.2*) линейных уравнений на совокупности частот $\{\hat{\omega}_l\}$, $l = 0, 1, 2, \ldots, m$, принадлежащих интервалам аппроксимации; только на этих частотах будет достигаться максимально допустимое отклонение.

В соответствии с этими соображениями поставленная задача *на одном этапе* приобретает формулировку:

При фиксированном M найти коэффициенты $\overline{a} = \{a_0, \ldots, a_M\}$, при которых достигается минимум максимальной ошибки δ на совокупности интервалов аппроксимации $\Omega = [\Omega_1, \Omega_2]$:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \alpha\delta \le B(\hat{\omega}, \overline{a}) \le 1 + \alpha\delta, \quad & \hat{\omega} \in \Omega_1; \\ -\delta \le B(\hat{\omega}, \overline{a}) \le \delta, \quad & \hat{\omega} \in \Omega_2; \\ \alpha = \text{const}; & \\ \max_{\Omega} \delta = \min_{\overline{a}}; & \\ \overline{a} = \{a_k\}, \quad k = 0, 1, \ldots, M, & \end{aligned}\right\} \tag{20.3}$$

где постоянная α, определяющая соотношение между δ_1 и δ_2, называется весовым коэффициентом и имеет следующий смысл: $\delta_2 = \delta$, $\delta_1 = \alpha \cdot \delta_2 = \alpha\delta$.

Весовой коэффициент α позволяет регулировать требования к АЧХ в интервалах аппроксимации:

- если $\alpha = 1$, то отклонение АЧХ от единицы в полосе пропускания и от нуля в полосе задерживания одинаковы $\delta_1 = \delta_2 = \delta$;
- если $\alpha < 1$, то отклонение АЧХ от единицы в полосе пропускания δ_1 меньше отклонения от нуля $\delta_2 = \delta$ в полосе задерживания $\delta_1 = \alpha\delta < \delta$;

например, при $\alpha = 0,5$ отклонение от единицы в полосе пропускания в два раза меньше отклонения от нуля в полосе задерживания;

- если $\alpha > 1$, то отклонение АЧХ от единицы в полосе пропускания δ_1 больше отклонения от нуля $\delta_2 = \delta$ в полосе задерживания $\delta_1 = \alpha\delta > \delta$; при $\alpha = 2$ отклонение от единицы в полосе пропускания в два раза больше отклонения от нуля в полосе задерживания.

Целевой функцией в (20.3) является отклонение δ:

$$\max_{\Omega} \delta = \min_{\bar{a}},$$

причем эта функция связана с коэффициентами $\bar{a} = \{a_0, \ldots, a_M\}$, меняющими свои значения в процессе решения (20.3). По этой причине коэффициенты называют также варьируемыми параметрами.

20.1.1.2. Процедура решения задачи оптимального синтеза

Рассмотрим, каким образом с помощью задачи (20.3) можно решить исходную задачу. Как уже было отмечено, решение задачи (20.2) сводится к многократному решению задачи (20.3), т. е. к постепенному приближению получаемой величины δ к заданной.

Процедура сводится к следующему:

1. Из практических соображений или по эмпирическим формулам задается начальное значение $M = M_1$, имеющее смысл первого приближения.
2. При назначенном порядке выполняется первая итерация (первый этап), результатом вычислений которой является величина $\min_{\bar{a}} \max_{\Omega} \delta = \delta^{(1)}$.
3. Полученное значение $\delta^{(1)}$ сравнивается попарно с допустимыми значениями отклонений в полосах пропускания и задерживания: ($\alpha \cdot \delta^{(1)}$ с δ_1) и ($\delta^{(1)}$ с δ_2). Возможны два результата сравнения и в соответствии с ними дальнейшие действия:
   - *требования к АЧХ удовлетворены*; тогда можно попытаться уменьшить M_1; при новом $M_2 < M_1$ выполнить вторую итерацию задачи (20.3) и получить новое значение $\min_{\bar{a}} \max_{\Omega} \delta = \delta^{(2)}$, которое будет больше предыдущего, т. е. $\delta^{(2)} > \delta^{(1)}$; проверить выполнение заданных требований. Известно, что за конечное число подобных итераций обя-

зательно найдется такое минимальное значение $M_{\min} = M_{\text{opt}}$, при котором еще выполняются условия задачи и достигается минимум максимального отклонения такой, что $\min\limits_{\bar{a}} \max\limits_{\Omega} \delta = \delta_{\text{opt}} \le \delta_2$ и $\alpha\delta_{\text{opt}} \le \delta_1$; на этом процедура заканчивается;

- *требования к АЧХ не удовлетворены*; тогда необходимо увеличить M_1 и при новом $M_2 > M_1$ решить задачу (20.3); получив $\delta^{(2)} < \delta^{(1)}$, вновь проверить выполнение заданных требований и, если они не выполняются, увеличить M_2. Как и в предыдущем случае, за конечное число подобных итераций обязательно найдется такое минимальное значение $M_{\min} = M_{\text{opt}}$, при котором еще выполняются условия задачи и достигается минимум максимального отклонения такой, что $\min\limits_{\bar{a}} \max\limits_{\Omega} \delta = \delta_{\text{opt}} \le \delta_2$ и $\alpha\delta_{\text{opt}} \le \delta_1$; на этом процедура заканчивается.

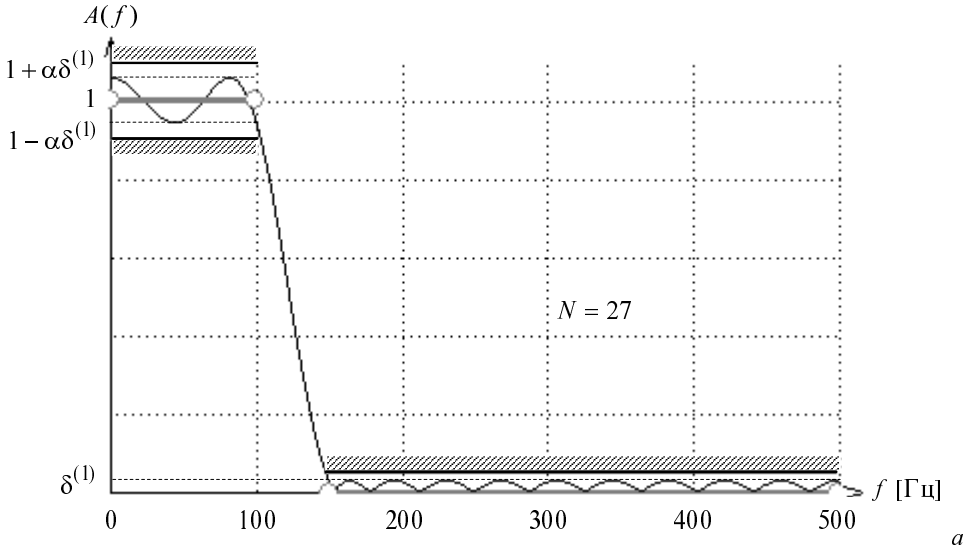
Определение:

Соответствующее порядку M_{opt} минимальное число N коэффициентов $\{b_i\}$, при котором еще выполняются условия задачи, называется *оптимальным* и обозначается N_{opt}.

Примечание

При решении задачи необходимо следить за тем, к какому из четырех типов фильтров принадлежит синтезируемый фильтр, и согласно этому типу выбирать импульсную характеристику (симметричную или антисимметричную) и значение N (четное или нечетное).

Пример синтеза фильтра НЧ типа 1 с использованием рассмотренной процедуры показан на рис. 20.2, где $\delta_1 = 0{,}1$ и $\delta_2 = 0{,}05$, т. е. $\alpha = 2$. При первом приближении (рис. 20.2, *а*) выбрано $N = 27$ и получены отклонения: $\delta^{(1)} = 0{,}0284$ и $\alpha\delta^{(1)} = 0{,}0568$. Из графика видно, что требования выполнены с большим запасом, а значение $N = 27$ является избыточным, поэтому можно уменьшить количество коэффициентов. Такое последовательное уменьшение приводит к $N = 21$, при котором достигается минимум максимальной ошибки аппроксимации, равный заданным допускам (рис. 20.2, *б*). Дальнейшее уменьшение N невозможно, поэтому $N = 21$ является оптимальным решением.



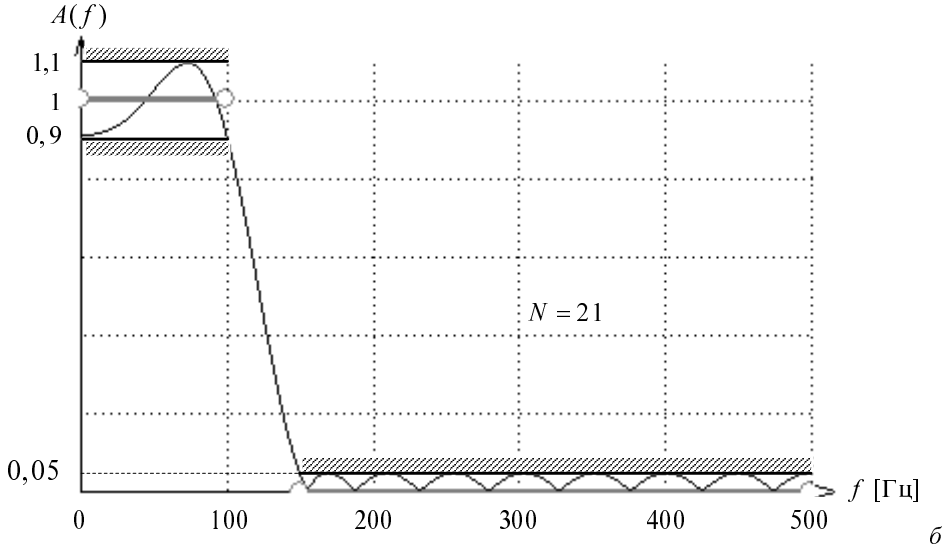


Рис. 20.2. Поиск оптимального решения для фильтра НЧ: АЧХ при избыточном (*а*) и оптимальном (*б*) значениях N

20.1.2. Понятие о полиномах Чебышева[1]

Результатом решения сформулированной ранее задачи аппроксимации в частотной области является некоторый тригонометрический полином порядка $M = M_{\text{opt}}$ вида (20.1)

$$B(\hat{\omega}, \overline{a}) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos \varphi_k(\hat{\omega}),$$

т. е. в конечном счете задача сводится к поиску коэффициентов полинома $B(\hat{\omega}, \overline{a})$. Иначе говоря, в рассмотренной задаче осуществляется аппроксимация заданной функции $\xi(\hat{\omega})$ (*см. п. 17.2.2*) полиномом $B(\hat{\omega}, \overline{a})$. Такая аппроксимация называется *полиномиальной.*

Тригонометрический полином $B(\hat{\omega}, \overline{a})$ можно выразить в более удобной форме, если использовать замену переменной

$$x = \cos(2\pi f T) = \cos\hat{\omega}, \quad -1 \le x \le 1,$$

откуда

$$\hat{\omega} = \arccos(x); \quad f = \frac{\arccos(x)}{2\pi} f_{\text{д}}.$$

При такой замене переменной аппроксимирующий полином

$$B(\hat{\omega}, \overline{a}) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(k\hat{\omega})$$

представляется в виде

$$B(\hat{\omega}, \overline{a}) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(k\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(k \arccos(x)). \tag{20.4}$$

Стоящая под знаком суммы функция

$$\cos(k \arccos(x)) \tag{20.5}$$

также является полиномом k-го порядка, получившим название полинома Чебышева.

Полиномы Чебышева (20.5) занимают одно из важнейших мест в теории аппроксимации.

---

[1] Рассматриваемые полиномы были введены П. Л. Чебышевым в сочинении "Теория механизмов, известных под названием параллелограммов" (1854 г.).

Полином Чебышева N-го порядка по определению имеет вид[2]

$$C_N(x) = \cos(N \arccos(x)) . \tag{20.6}$$

Убедимся, что (20.6) действительно представляет собой полином по x $(-1 \le x \le 1)$ степени N с вещественными коэффициентами:

$$N = 0 \quad C_0(x) = 1;$$

$$N = 1 \quad C_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x;$$

$$N = 2 \quad C_2(x) = \cos 2 \arccos(x) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Зная полиномы 1-го и 2-го порядков, получим рекуррентную формулу для представления полиномов степени $N \ge 3$. В целях удобства обозначим

$$\theta = \arccos(x) .$$

Тогда из (20.6) следует:

$$C_{N-1} = \cos\big((N-1)\theta\big) = \cos(N\theta)\cos(\theta) + \sin(N\theta)\sin(\theta),$$

$$C_{N+1} = \cos\big((N+1)\theta\big) = \cos(N\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta).$$

Суммируя эти два равенства, имеем

$$C_{N-1}(x) + C_{N+1}(x) = 2\cos(N\theta)\cos(\theta) . \tag{20.7}$$

Учитывая соотношения

$$\cos(N\theta) = C_N(x) \quad \text{и} \quad \cos(\theta) = \cos \ \text{arc} \ \cos(x) = x ,$$

из (20.7) окончательно получаем *рекуррентную формулу* для конструирования полиномов Чебышева

$$C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x). \tag{20.8}$$

На основании равенств

$$C_1(x) = x \quad \text{и} \quad C_2(x) = 2x^2 - 1$$

нетрудно получить следующий ряд полиномов:

$$\left.\begin{aligned} &C_3(x) = 4x^3 - 3x; \\ &C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1; \\ &C_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x; \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{20.9}$$

[2] Более точно такие полиномы называются полиномами Чебышева I рода.

Непосредственно из определения полинома Чебышева, а также из формул (20.8) и (20.9) следует:

1. Коэффициент полинома $C_N(x)$ при старшей степени x равен 2^{N-1}.
2. Для всех $x \in [-1, 1]$ и любого N выполняется неравенство $|C_N(x)| \le 1$.
3. Любой полином степени N представляет собой разность между функцией $\zeta_N(x) = 2^{N-1}x^N$ и полиномом $P(x)$ меньшей степени

$$C_N(x) = \zeta_N(x) - P(x);$$

причем максимальное значение этой разности, не превосходящее 1 на интервале $-1 \le x \le 1$:

$$\max|\zeta_N(x) - P(x)| \le 1,$$

является минимально возможным. На этом основании доказывается, что ***из всех полиномов степени*** N ***с коэффициентом при старшем члене*** 2^{N-1} ***полином Чебышева*** $C_N(x)$ ***наименее уклоняется от нуля***.

Рассмотрим характер этого уклонения при произвольном N, для чего обратимся к определению полинома Чебышева (20.6)

$$C_N(x) = \cos(N \arccos(x)).$$

Пусть переменная x возрастает от -1 до 1; тогда угол $\varphi = \arccos(x)$ возрастает от $\varphi = -\pi$ до $\varphi = 0$ соответственно. В то же время угол $N\varphi$ возрастает *от* $-N\pi$ *до* 0. Последнее означает, что *в указанных пределах функция* $\cos(n\varphi)$ *ровно* N *раз переходит через нуль (т. е. принимает значения, равные нулю) и* $N+1$ *раз достигает значений –1 или +1, причем знаки этих величин чередуются*.

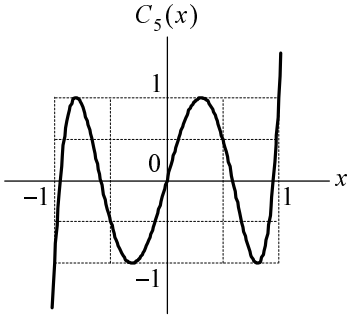


Рис. 20.3. График полинома $C_5(x)$

На рис. 20.3 показан график полинома $C_5(x)$, который на интервале аппроксимации $-1 \le x \le 1$ имеет пять нулей (пересечений с осью x) и шесть раз достигает максимальных по абсолютной величине значений, из которых два находятся на границах интервала.

Примечание

1. Вне интервала $-1 \le x \le 1$ значения полиномов Чебышева возрастают; их вычисляют с помощью эквивалентного представления полиномов в виде (20.9).
2. Если по условиям задачи максимальные отклонения полинома $C_N(x)$ должны отличаться от ± 1 в ε раз, необходимо записать

$$\varepsilon C_N(x) = \varepsilon \cos(N \arccos(x)) ,$$

и тогда на интервале $-1 \le x \le 1$ будет соблюдаться неравенство

$$-\varepsilon \le \varepsilon C_N(x) \le \varepsilon .$$

3. Если по условиям задачи полином $C_N(x)$ должен наименее уклоняться от нуля на интервале $[x_{-1}, x_1]$, отличающемся от интервала $-1 \le x \le 1$, достаточно в решении (20.6) или (20.9) произвести линейное преобразование переменной x по формуле

$$\frac{2x - x_1 - x_{-1}}{x_1 - x_{-1}} .$$

Таким образом, тригонометрический полином $B(\hat{\omega}, \overline{a})$ может быть представлен в виде суммы (20.4) полиномов Чебышева $C_k(x)$ с весом a_k, $k = 0, 1, \ldots, M$,

$$B(\hat{\omega}, \overline{a}) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(k\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(k \arccos(x)) = \sum_{k=0}^{M} a_k C_k(x),$$

и поставленная задача должна решаться на классе *полиномов Чебышева* $C_k(x)$.

20.2. Теорема Чебышева

Рассматриваемая задача оптимального синтеза (20.2) и (20.3) в общем виде является задачей аппроксимации (приближения) идеальной (аппроксимируемой) функции $\xi(\hat{\omega})$ полиномом $B(\hat{\omega}, \overline{a})$. Для выбранного в качестве примера фильтра НЧ аппроксимируемая функция имеет вид (рис. 20.4)

$$\xi(\hat{\omega}) = \begin{cases} 1, & \hat{\omega} \in \Omega_1, \quad 0 \le \hat{\omega} \le \hat{\omega}_\chi; \\ 0, & \hat{\omega} \in \Omega_2, \quad \hat{\omega}_k \le \hat{\omega} \le \pi. \end{cases} \tag{20.10}$$

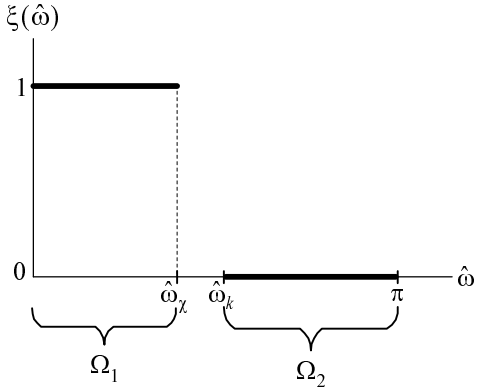


Рис. 20.4. Аппроксимируемая функция

Аппроксимирующая функция согласно (20.3)

$$\left.\begin{aligned} 1-\alpha\delta \le B(\hat{\omega}, \overline{a}) \le 1+\alpha\delta, \quad \hat{\omega} \in \Omega_1; \\ -\delta \le B(\hat{\omega}, \overline{a}) \le \delta, \qquad \hat{\omega} \in \Omega_2 \end{aligned}\right\}$$

в результате поэтапного решения задачи должна попасть в заданные допуски, т. е. результирующая ошибка аппроксимации δ (максимальное отклонение) не должна превышать δ_2; иначе говоря, ***максимальное отклонение должно быть минимальным***.

В этом смысле поставленная задача для одного этапа принимает вид: *на классе полиномов $C_k(x)$ найти такой вектор коэффициентов $\overline{a}$ тригонометрического полинома $B(\hat{\omega}, \overline{a})$ порядка $M = M_{\text{фикс}}$, при котором максимум модуля взвешенной ошибки аппроксимации на совокупности интервалов аппроксимации Ω был бы минимальным*

$$\max_{\hat{\omega} \in \Omega} p(\hat{\omega}) \left| \xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \overline{a}) \right| \Rightarrow \min_{\overline{a}}, \tag{20.11}$$

где:

$\overline{a} = \{a_0, a_1, \ldots, a_M\}$ — искомый вектор коэффициентов;

Ω — совокупность интервалов аппроксимации (Ω_1 и Ω_2 в нашем примере);

$p(\hat{\omega})$ — весовая функция;

$\left|\xi(\hat{\omega}) - B(\overline{a}, \hat{\omega})\right| = \delta$ — модуль ошибки аппроксимации.

Это означает, что *изучаемая задача относится к классу минимаксных и является итеративной.*

Поясним сказанное еще раз, обратившись к весовой функции $p(\hat{\omega})$. Весовую функцию определяют по-разному (*см п. 17.2.6*); в частности, во многих важных приложениях ее записывают так:

$$p(\hat{\omega}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}, & \hat{\omega} \in \Omega_1; \\ 1, & \hat{\omega} \in \Omega_2. \end{cases} \tag{20.12}$$

Пусть в результате решения (20.11) получено

$$\max_{\hat{\omega} \in \Omega} p(\hat{\omega}) \left| \xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \overline{a}) \right| \le \delta_{\min} .$$

Тогда для интервала аппроксимации $\Omega_1 = [0, \hat{\omega}_\chi]$

$$\max_{\hat{\omega} \in \Omega_1} \frac{1}{\alpha} \left| \xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \overline{a}) \right| \le \delta_{1\min}$$

или

$$\max_{\hat{\omega} \in \Omega_1} \left| \xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \overline{a}) \right| \le \alpha \delta_{\min} ,$$

а для интервала аппроксимации $\Omega_2 = [\hat{\omega}_k, \pi]$

$$\max_{\hat{\omega} \in \Omega_2} \left| \xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \overline{a}) \right| \le \delta_{\min} , \tag{20.13}$$

что совпадает с требованиями и ограничениями (20.3). Отсюда следует, что качество решения, т. е. критерий близости, полностью определяется достижением минимума максимального отклонения $\min \max \delta$. Это означает, в свою очередь, что относительно аппроксимируемой функции аппроксимирующая функция колеблется с амплитудой $\delta_{\min}$ в интервале частот Ω_2 и с амплитудой $\alpha\delta_{\min}$ в интервале Ω_1. Такое *колебание называется равномерным или равноволновым*, а сам *критерий приближения — равномерным (чебышевским).*

Вывод: *задачу (20.3) можно решать как задачу (20.13) наилучшего равномерного приближения функции* $\xi(\hat{\omega})$ *полиномом* $B(\hat{\omega}, \overline{a})$ *с весом* $p(\hat{\omega})$ *на совокупности интервалов аппроксимации* Ω.

Это означает, что при вычислении коэффициентов полинома $B(\hat{\omega}, \overline{a})$ на каждом этапе *необходимо решать задачу наилучшего приближения.* Основа-

нием для решения такой задачи служит обобщенная теорема об альтернансе (теорема Чебышева[3]):

Для того чтобы тригонометрический полином

$$B(\hat{\omega}, \overline{a}) = \sum_{k=0}^{M} a_k \varphi_k(\hat{\omega})$$

был единственным полиномом[4] *наилучшего равномерного приближения непрерывной функции* $\xi(\hat{\omega})$ *на совокупности интервалов аппроксимации* Ω, *необходимо и достаточно, чтобы абсолютный максимум взвешенной разности*

$$\max_{\hat{\omega}\in\Omega} p(\hat{\omega})\left|\xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \overline{a})\right| = \delta_{\max}$$

достигался не менее чем в $(M+2)$ точках $\hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2 < ... < \hat{\omega}_l < ... < \hat{\omega}_{M+2}$, в которых знаки разности

$$\delta(\hat{\omega}) = p(\hat{\omega})\left[\xi(\hat{\omega}) - \sum_{k=0}^{M} a_k \varphi_k(\hat{\omega})\right]$$

последовательно противоположны, т. е.

$$\delta(\hat{\omega}_l) = -\delta(\hat{\omega}_{l-1}).$$

Определения:

1. Совокупность точек $\{\hat{\omega}_l\}$, в которых разность $\delta(\hat{\omega})$ принимает равные по абсолютной величине и чередующиеся по знаку значения (рис. 20.5, *а*, *б*), называется чебышевским альтернансом или просто альтернансом, а сами частоты $\hat{\omega}_l$ называются *частотами альтернанса.*

2. Искомые коэффициенты a_k, изменяемые (варьируемые) в процессе решения задачи, называются варьируемыми параметрами полинома $B(\hat{\omega}, \overline{a})$.

Примеры различных вариантов чебышевского альтернанса приведены на рис. 20.5, где точками обозначены частоты альтернанса. Из этого рисунка видно, что:

- частоты альтернанса могут располагаться произвольно: как эквидистантно (рис. 20.5, *а*), т. е. на равном расстоянии относительно друг друга, так и не эквидистантно (рис. 20.5, *б*);
- на граничных частотах отклонение может не быть равным $\delta_{\max}$ (рис. 20.5, *в*), поэтому частоты $\hat{\omega} = 0$ и $\hat{\omega} = \pi$ могут не относиться к частотам

[3] Чебышев Пафнутий Львович (1821—1894) — великий русский математик, член Императорской академии наук (1853), Парижской академии наук (1860). Данная теорема относится к разработанной им в конце 80-х годов теории функций, наименее уклоняющихся от нуля.

[4] Теорема Чебышева об альтернансе соответствует теореме Хаара о единственности наилучшего приближения.

альтернанса (например, КИХ-фильтры типа 3 на указанных частотах всегда имеют нуль АЧХ).

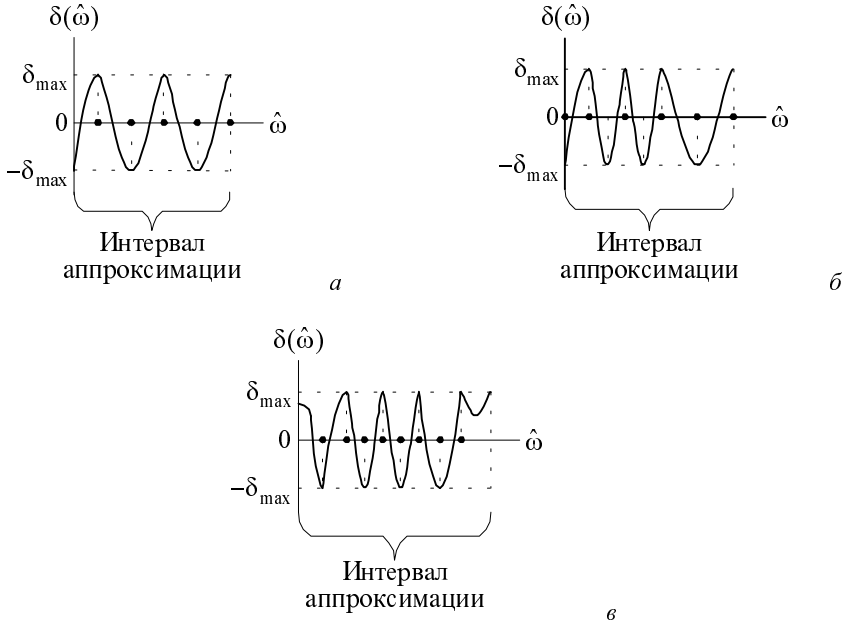


Рис. 20.5. Примеры вариантов чебышевского альтернанса

Таким образом, из теоремы об альтернансе (или обобщенной теореме Чебышева) *следует*:

- существует единственный полином $B(\hat{\omega}, \hat{a})$ наилучшего приближения порядка M; такой полином обеспечивает минимум максимальной ошибки аппроксимации $\delta_{\max} = \min$;
- существует единственный полином наилучшего приближения при заданной ошибке аппроксимации δ; такой полином имеет наименьший порядок $M = M_{\min}$;
- взвешенная ошибка аппроксимации $\delta(\hat{\omega})$ имеет равноволновый характер;
- количество частот альтернанса m не менее чем на два превышает порядок полинома $B(\hat{\omega}, \hat{a})$ или не менее чем на единицу число варьируемых $L = M + 1$ параметров (коэффициентов) a_k, т. е. $m \geq M + 2$.

Примечание

В задачах синтеза избирательных фильтров неравенство $m \geq M + 2$ превращается в равенство $m = M + 2$.

Пример 20.1

Рассчитаем НЧ-фильтр Чебышева по требованиям, сформулированным в примере 19.1, с помощью пакета программ синтеза цифровых фильтров *FD*3. Результаты расчета показаны в табл. 20.1 и на рис. 20.6.

Таблица 20.1. *Коэффициенты НЧ-фильтра Чебышева*

***b*(*i*)**	**Значения коэффициентов**	***b*(*N* – *i* – 1)**
b(0)	–1,05916900E–003	*b*(10)
b(1)	9,806179000E–004	*b*(9)
b(2)	3,240292220E–002	*b*(8)
b(3)	1,262916000E–001	*b*(7)
b(4)	2,551977915E–001	*b*(6)
b(5)	3,185478691E–001	*b*(5)

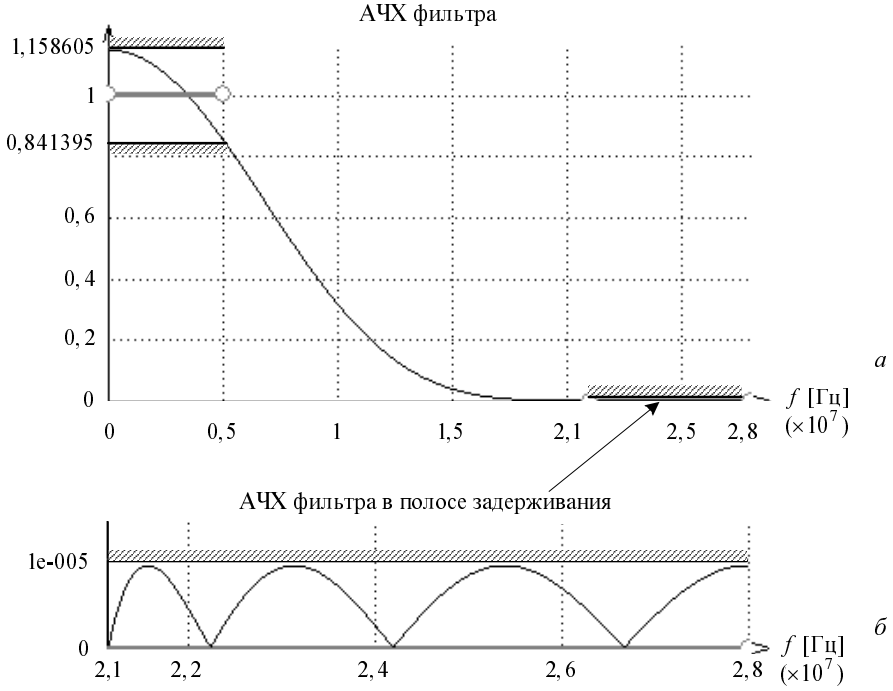


Рис. 20.6. АЧХ НЧ-фильтра Чебышева, рассчитанного по требованиям примера 19.1 (*а*), АЧХ в полосе задерживания (*б*)

Число коэффициентов фильтра Чебышева оказалось равно 11 против 23 коэффициентов фильтра Кайзера, т. е. в два раза меньше! Таким образом, рассчитанный фильтр является оптимальным.

Приведенная теорема Чебышева важна по трем обстоятельствам, которые рассмотрим подробно.

Во-первых, теорема позволяет проверять оптимальность полученного решения.

Пример 20.2

Пусть в результате синтеза НЧ-фильтра Чебышева по требованиям:

- частота дискретизации $f_д = 1000$ Гц;
- частота среза $f_\chi = 180$ Гц;
- граничная частота $f_k = 240$ Гц;
- отклонение в полосе пропускания $\delta_1 = 0{,}1$;
- отклонение в полосе задерживания $\delta_2 = 0{,}1$

получен полином

$$B(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{7} a_k \cos(k\hat{\omega}) \qquad (20.14)$$

порядка $M = 7$ (т. е. найдены 8 коэффициентов $a_k = 2b_k$). АЧХ синтезированного фильтра изображена на рис. 20.7, где, как и на рис. 20.5, точками показаны частоты альтернанса. Проверим, является ли это решение оптимальным при условии, что $m = M + 2$.

Решение. На рисунке количество частот альтернанса $m = 9$, а число варьируемых параметров (коэффициентов) L в (20.14) равно 8, т. е. количество частот альтернанса на единицу больше количества варьируемых параметров a_k. Поэтому можно утверждать, что полученное решение оптимально.

Во-вторых, по числу $m \geq M + 2$ частот альтернанса можно определить порядок синтезированного фильтра и наоборот: по порядку оптимального фильтра можно определить число точек альтернанса. Покажем это для нечетных и четных N (см. табл. 18.2):

- N нечетное (фильтры типа 1 и 3);

  фильтр типа 1 имеет количество коэффициентов передаточной функции N_1 и порядок полинома $B_1(\hat{\omega}, \overline{a})$

$$M_1 = \frac{N_1 - 1}{2},$$

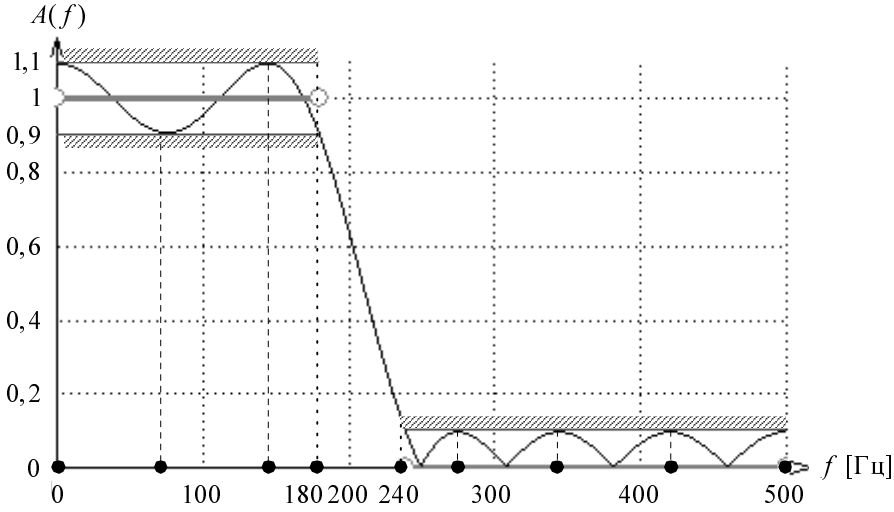


Рис. 20.7. АЧХ рассчитанного фильтра НЧ

количество точек альтернанса

$$m = M_1 + 2 = \frac{N_1 - 1}{2} + 2,$$

отсюда количество коэффициентов синтезированного фильтра типа 1

$$N_1 = 2m - 3. \qquad (20.15)$$

Например, на рис. 20.7 АЧХ имеет $m = 9$ частот альтернанса, поэтому количество коэффициентов передаточной функции соответствующего ФНЧ равно

$$N_1 = 2 \cdot 9 - 3 = 15,$$

следовательно, такой АЧХ может обладать КИХ-фильтр порядка $R = 14$ с передаточной функцией вида

$$H(z) = \sum_{i=0}^{14} b_i z^{-i};$$

фильтр типа 3 имеет порядок полинома $B_3(\hat{\omega}, \overline{a})$

$$M_3 = \frac{R_3}{2} - 1 = \frac{N_3 - 1}{2} - 1,$$

количество точек альтернанса

$$m = M_3 + 2 = \frac{N_3 - 1}{2} - 1 + 2 = \frac{N_3 - 1}{2} + 1,$$

отсюда количество коэффициентов синтезированного фильтра

$$N_3 = 2m - 1; \tag{20.16}$$

- N четное (*фильтры типа 2 и 4*);

в этом случае

$$M_{2,4} = \frac{R-1}{2} = \frac{N-2}{2}; \quad m = \frac{N-2}{2} + 2,$$

откуда

$$N_{2,4} = 2m - 2. \tag{20.17}$$

В-третьих, поскольку в общем случае аналитически найти полином (функцию) наилучшего приближения невозможно, для получения оптимальных полиномов используются численные методы, основу которых составляет приведенная теорема Чебышева.

Наиболее эффективным методом поиска чебышевского приближения является второй полиномиальный алгоритм Ремеза[5]. В дальнейшем этот алгоритм был многократно модифицирован как самим автором, так и другими математиками с целью получения более точных результатов и распространения его на конструирование передаточных функций КИХ-фильтров с порядками, достигающими нескольких сотен; такие модифицированные алгоритмы Ремеза получили иные названия, обычно связанные с именами модификаторов.

Например, в разработанном под руководством проф. Ланнэ А. А. (Центр ЦОС ГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича) пакете программ синтеза цифровых фильтров[6] *FD* используется оригинальный модифицированный алгоритм Ремеза, предложенный Е. Тавастшерной и П. Яковлевым[7]. Алгоритм позволил успешно синтезировать КИХ-фильтры до 250 порядка.

Далее рассматривается существо второго полиномиального алгоритма Ремеза.

---

[5] Ремез Е. Я. (1896—1975) — выдающийся математик, академик Академии наук Украины; в середине 30-х годов разработал и в дальнейшем совершенствовал эффективные алгоритмы чебышевской аппроксимации; полностью теория таких алгоритмов изложена в его труде "Основы численных методов чебышевского приближения", Киев, Наукова думка, 1969 г.

[6] Все приводимые примеры расчета фильтров выполнены с помощью этой программы.

[7] Тавастшерна Е. К., Яковлев П. В. Расчет нерекурсивных цифровых фильтров с оптимальной по Чебышеву амплитудно-частотной характеристикой // Радиоэлектроника. — 1991. — № 12.

20.3. Полиномиальный алгоритм Ремеза

20.3.1. Понятие об алгоритме Ремеза

Идея алгоритма основана на том, что всегда можно получить функцию ошибки

$$\varepsilon(\hat{\omega}) = \xi(\hat{\omega}) - \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(\hat{\omega}k), \tag{20.18}$$

принимающую значения $\pm\delta$ на некоторой заданной сетке $(M+2)$ частот $\hat{\omega}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M+2$. В (20.18) для простоты весовая функция принята равной единице $p(\hat{\omega}) = 1$. Иначе говоря, получаемая из (20.18) система $M+2$ линейных уравнений с $(M+2)$ неизвестными коэффициентами a_k и δ

$$\xi(\hat{\omega}_i) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(\hat{\omega}_i k) + (-1)^i \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, M+2 \tag{20.19}$$

имеет единственное решение для коэффициентов $\{a_k\}$ и максимум отклонения δ на заданных частотах $\{\hat{\omega}_i\}$ из интервала аппроксимации Ω. Отсюда *коэффициенты* $\{a_k\}$, *полученные при расчете, оказываются коэффициентами наилучшей аппроксимации, а максимум ошибки аппроксимации* δ *является минимальным*. Этот вывод следует непосредственно из обобщенной теоремы Чебышева, согласно которой частоты $\{\hat{\omega}_i\}$ являются частотами альтернанса, а δ есть амплитуда ошибки на всех частотах $\{\hat{\omega}_i\}$; более того, если на совокупности интервалов аппроксимации Ω содержится только $(M+2)$ частоты, то

$$\max_{\hat{\omega} \in \Omega} \left| \xi(\hat{\omega}) - \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(\hat{\omega}k) \right| = \underset{a_k}{\delta}. \tag{20.20}$$

В большинстве практических случаев Ω содержит более чем $(M+2)$ частоты; задача состоит в том, чтобы найти из них только те $(M+2)$ частоты, которые являются экстремальными (частотами альтернанса).

Алгоритм Ремеза итерационный, т. е. его результат представляет собой итог многократного применения серии одних и тех же шагов. Алгоритм начинается с пробной сетки частот при заданном порядке M и в ходе решения изменяет частоты до тех пор, пока не будет найдена сетка экстремальных частот.

В очередной итерации используются новые $(M+2)$ частоты, на которых взвешенная ошибка $\varepsilon(\hat{\omega})$, во-первых, имеет значение, не меньшее, чем в предыдущей итерации, и, во-вторых, на соседних частотах знаки $\varepsilon(\hat{\omega})$ противоположны. Если, тем не менее, требования не выполняются (величина M недостаточна) или выполняются с запасом (M выбрано больше необходимого), назначается новый порядок M и алгоритм повторяется. Окончательным (оптимальным) решением является такое значение M, уменьшение которого на единицу приводит к неудовлетворению заданных требований. Поскольку на каждой итерации алгоритма происходит обмен порядка на величину взвешенной ошибки, алгоритм был назван обменным.

Полиномиальный обменный ***алгоритм Ремеза*** *включает в себя следующие шаги*:

1. Задание начального (нулевого) приближения пробной сетки экстремальных частот

$$S^{(0)} = \left\{\hat{\omega}_1^{(0)}, \ldots, \hat{\omega}_i^{(0)}, \ldots, \hat{\omega}_{M+2}^{(0)}\right\}; \;\; \hat{\omega}_i^{(0)} \in \Omega .$$

   Выбор начального (нулевого) приближения представляет особую задачу, состоящую в поиске такого расположения экстремальных частот (частот альтернанса), которое приводит к улучшению сходимости алгоритма, т. е. к более быстрому достижению результата за счет сокращения количества дальнейших итераций. Простейшим, но далеко не лучшим, решением этой задачи является равномерное расположение частот на интервале аппроксимации Ω.

2. Решение системы линейных уравнений (20.19)

$$\xi(\hat{\omega}_i) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(\hat{\omega}_i k) + (-1)^i \delta, \;\; i = 1, 2, \ldots, M+2,$$

   в результате которого вычисляются вектор коэффициентов $\overline{a}^{(0)} = \{a_k\}$ и ошибка $\delta^{(0)}$, где верхний индекс указывает номер итерации (этапа).

3. При коэффициентах $\overline{a}^{(0)}$ на густой сетке частот $\{\hat{\omega}_l\}$ ($l = 1, 2, \ldots, L;\; L \gg M$) вычисляются значения b_l аппроксимирующей функции

$$b_l = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(\hat{\omega}_l).$$

4. На полученном массиве $\{b_l\}$ определяется максимальная ошибка аппроксимации

$$\max_{\hat{\omega}_l \in \Omega} \left|\varepsilon(\hat{\omega}_l)\right| = \left|\xi(\hat{\omega}_l) - b_l\right|.$$

5. Определяется необходимость очередной итерации:
   - если $\delta = \max\left|\varepsilon(\hat{\omega}_l)\right|$, процесс заканчивается; полученное значение M (а потому и число коэффициентов N передаточной функции) является оптимальным;
   - если $\delta < \max\left|\varepsilon(\hat{\omega}_l)\right|$, назначается новая сетка частот

$$S^{(1)} = \left\{\hat{\omega}_1^{(1)}, \ldots, \hat{\omega}_l^{(1)}, \ldots, \hat{\omega}_{M+2}^{(1)}\right\}; \quad \hat{\omega}_l^{(1)} \in \Omega,$$

   среди которых обязательно должны быть частоты с $\max\left|\varepsilon(\hat{\omega}_l)\right|$, а также все частоты, где

$$\left|\varepsilon(\hat{\omega}_l)\right| \geq \delta;$$

   если таких частот больше, чем $M+2$, выбираются $M+2$ частоты с наибольшими ошибками и чередованием знаков; процесс повторяется с шага 2.

В приводимом далее численном примере используется полиномиальный вариант задачи чебышевской аппроксимации (20.19).

20.3.2. Пример использования обменного алгоритма Ремеза

Поставим задачу аппроксимации параболы

$$\xi(x) = x^2, \quad x \in [0, 1]$$

прямой линией

$$P(x) = a_0 + a_1 x. \tag{20.21}$$

Тогда ***задача Чебышевской аппроксимации*** примет вид: *найти коэффициенты* a_0 *и* a_1, *минимизирующие ошибку аппроксимации в смысле критерия Чебышева*

$$\varepsilon(x) = \max_{x \in [0, 1]} \left|x^2 - (a_0 + a_1 x)\right| \Rightarrow \min_{a_0, a_1}.$$

Решение. В данном примере аппроксимирующий полином имеет вид

$$P(x) = a_0 + a_1 x = \sum_{k=0}^{M} a_k x^k = \sum_{k=0}^{1} a_k x^k ,$$

поэтому функция ошибки аппроксимации $\varepsilon(x)$, согласно обобщенной теореме Чебышева, должна иметь $m = M + 2 = 1 + 2 = 3$ экстремальные точки (иначе говоря, необходимо найти два коэффициента полинома, поэтому функция ошибки должна иметь число точек альтернанса на единицу больше, т. е. три).

Решение задачи поясняется рис. 20.8.

Обозначим, как и ранее, через S сетку точек

$$S = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}.$$

Шаг 1. Выбор начального приближения.

В качестве начального приближения выберем в области $[0, 1]$ произвольную сетку (рис. 20.8, *а*)

$$S^{(0)} = \{0,25;\ 0,5;\ 1\}.$$

Шаг 2. Решение системы из трех линейных уравнений на сетке $S^{(0)}$

$$x_i^2 = a_0 + a_1 x_i + (-1)^i \delta_0, \quad i = 0, 1, 2, \tag{20.22}$$

где $(-1)^i$ обеспечивает колебательный характер поведения ошибки $\varepsilon(x)$. Для принятой сетки $S^{(0)}$ система имеет вид

$$\begin{cases} a_0 + 0,25 a_1 + \delta_0 = 0,0625; \\ a_0 + \ \ 0,5 a_1 - \delta_0 = 0,25; \\ a_0 + \qquad a_1 + \delta_0 = 1, \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,25 & 1 \\ 1 & 0,5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0625 \\ 0,25 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решением этой системы являются: $a_0 = -0,3125$; $a_1 = 1,25$; $\delta_0 = 0,0625$ (см. рис. 20.8, *б*).

Шаг 3. Вычисление ошибки $\varepsilon_0(x)$ на густой сетке $x \in [0; 1]$ (например, через 0,0001)

$$\varepsilon_0(x) = x^2 - (a_0 + a_1 x)$$

с тем, чтобы определить, существуют ли точки, где ошибка $\varepsilon_0(x) > |\delta_0|$. Оказалось, что таких точек две: при $x = 0$ она максимальна и равна $\varepsilon_0(0) = 0,3125$; в точке $x = 0,625$ ошибка $\varepsilon_0(0,625) = -0,78125$ и в точке $x = 1$ ошибка составляет $\varepsilon_0(1) = 0,78125$. Видно, что нулевое приближение не дало желаемого результата, т. е. сетка $S^{(0)}$ не является набором точек альтернанса, поэтому необходимо назначить новую сетку и перейти к шагу 2.

Повторяемый шаг 2. Назначение новой пробной сетки $S^{(1)}$ максимумов и решение на этой сетке системы из трех линейных уравнений.

Из рис. 20.8, *б* следует, что чередование знаков ошибки аппроксимации происходит в точках: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,625$ и $x_3 = 1$. Эти точки и составляют новую сетку

$$S^{(1)} = \{0;\ 0,625;\ 1\},$$

для которой система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,625 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,390625 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решением этой системы являются: $a_0 = 0,1328125$; $a_1 = 1$; $\delta_1 = 0,1171875$ (рис. 20.8, *в*). Необходимо проверить полученное решение на оптимальность, для чего требуется повторить шаг 3.

Повторяемый шаг 3. Вычисление ошибки $\varepsilon_1(x)$ на густой сетке $x \in [0;\ 1]$

$$\varepsilon_1(x) = x^2 - (a_0 + a_1 x)$$

с тем, чтобы определить точки, где ошибка $|\varepsilon_1(x)| \geq \delta_1$. Таких точек три: в двух из них $x = 0$ и $x = 1$ ошибка равна $\delta_1 = 0,1171875 \approx 0,117$, а третья ошибка в точке $x = 0,5$ максимальна по абсолютной величине и равна $\varepsilon_1(0,5) = -0,1328125$. Видно, что и новое приближение не дало желаемого результата, т. е. сетка $S^{(1)}$ не содержит альтернанса, поэтому необходимо назначить очередную сетку и повторить итерацию, начиная с шага 2.

Повторяемый шаг 2. Назначение очередной сетки $S^{(2)}$ и решение на этой сетке системы из трех линейных уравнений.

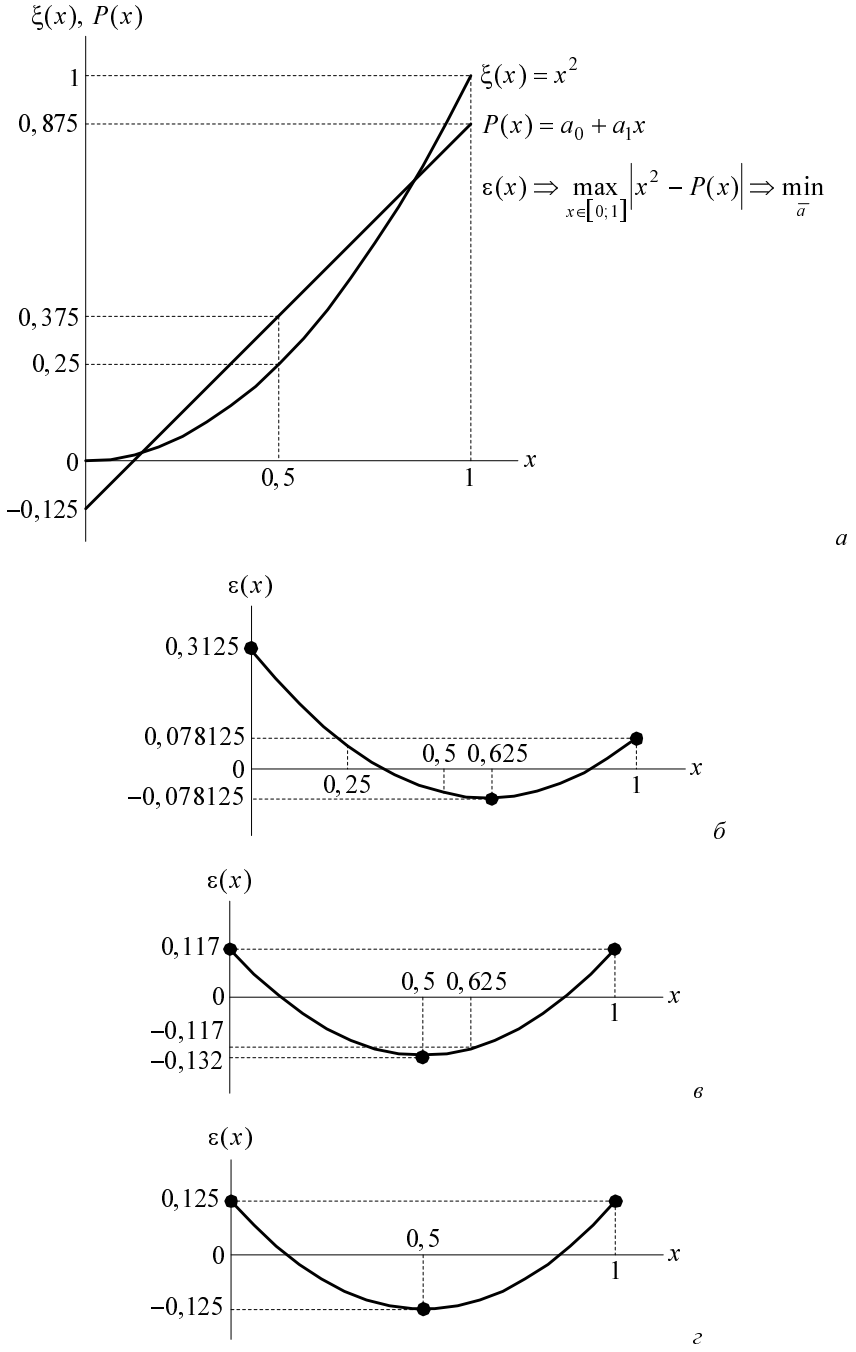


Рис. 20.8. Демонстрация полиномиального алгоритма Ремеза

Из рис. 20.8, *в* следует, что чередование знаков ошибки аппроксимации происходит в точках: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5$ и $x_3 = 1$. Эти точки и составляют очередную сетку

$$S^{(2)} = \{0;\ 0,5;\ 1\},$$

для которой система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,25 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решением этой системы являются: $a_0 = -0,125$; $a_1 = 1$; $\delta_2 = 0,125$ и максимум ошибки $\max\left|\varepsilon_2(x)\right| = 0,125$ (рис. 20.8, *г*).

Вследствие равенства $\max\left|\varepsilon_2(x)\right| = \delta_2$ ошибок на заданной сетке и чередования их знаков

$$\varepsilon_2(0,5) = -\varepsilon_2(0), \quad \varepsilon_2(1) = -\varepsilon_2(0,5)$$

можно утверждать, что полученное решение является оптимальным и аппроксимирующий полином имеет вид

$$P(x) = -0,125 + x.$$

Соответствующая полиному прямая показана на рис. 20.8, *а*.