Представление неизвестной плотности вероятности случайной величины рядами на основе оценок моментов распределения

Разложение по полиномам Эрмита

Используется при ожидаемом подобии неизвестной плотности гауссовскому закону распределения. Получаемые ряды носят название рядов Эджворта или Грама-Шарлье.

Общая форма записи ряда:

$$w_\xi(x) = \varphi(x) \sum_{k=0}^{\infty} c_k Q_k(x),$$

где $\varphi(x)$ - весовая функция, c_k – коэффициенты, зависящие от моментов распределения, $Q_k(x)$ – ортогональные функции (полиномы)

Полиномы Эрмита:

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \ n = 0,1,2,...$$

Весовая функция – функция плотности нормального распределения:

$$\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2)$$

где

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{k!}} \int_{-\infty}^{\infty} w_\xi(x) H_k(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{k!}} m_1\{H_k(\xi)\}$$

причем $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$. Тогда

$$w_\xi(x) = \varphi(x) + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{c_k}{\sqrt{k!}} \varphi^{(k)}(x),$$

где $\varphi^{(k)}(x)$ – k-я производная нормальной плотности распределения. Первые несколько коэффициентов c_k в ряду:

$$c_3 = \frac{1}{\sqrt{3!}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^3 - 3x)\, w_\xi(x)\, dx = \frac{\mathrm{k}}{\sqrt{3!}},$$

$$c_4 = \frac{1}{\sqrt{4!}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^4 - 6x^2 + 3)\, w_\xi(x)\, dx = \frac{\gamma}{\sqrt{4!}},$$

$$c_5 = \frac{1}{\sqrt{5!}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^5 - 10x^3 + 15x)\, w_\xi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{5!}} \left(\frac{\mu_5}{\sigma^5} - 10\mathrm{k}\right).$$

Тогда первые три члена разложения (2.86) представляются следующим образом:

$$w_\xi(x) = \varphi(x) - \frac{\mathrm{k}}{3!}\varphi^{(3)}(x) + \frac{\gamma}{4!}\varphi^{(4)}(x) + \ldots, \tag{2.88}$$

где k и γ — коэффициенты асимметрии и эксцесса распределения случайной величины ξ.

Из (2.88) нетрудно также описать аппроксимацию интегральной функции распределения:

$$F_\xi(x) = F(x) - \frac{\mathrm{k}}{3!}\varphi^{(2)}(x) + \frac{\gamma}{4!}\varphi^{(3)}(x) - \ldots, \tag{2.89}$$

где $F(x)$ — интеграл Лапласа.

Разложение по полиномам Лаггера

Используется при ожидаемом подобии неизвестной плотности закону распределения Рэлея-Райса.

Полиномы Лаггера:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \frac{1}{n!} x^{-\alpha} \mathrm{e}^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x}\right),$$

$$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\quad \alpha > -1,\quad x > 0.$$

В этом случае $\varphi(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{-x}/\Gamma(\alpha+1)$, $x \geqslant 0$, $\alpha > 0$ (гамма-распределение); учитывая условие нормировки (2.78), получаем в соответствии с (2.77)

$$w_\xi(x) = \frac{x^\alpha \mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\begin{matrix} k+\alpha \\ \end{matrix}\right)}} L_k^{(\alpha)}(x),$$

где

$$c_k = \binom{k+\alpha}{k}^{-1/2} \int^{\infty} w_\xi(x) L_k^{(\alpha)}(x)\,dx.$$

Так как для неотрицательной случайной величины среднее $m_1 > 0$, то все ее значения можно нормировать путем деления на m_1. Тогда в (2.91) при $\alpha = 0$

$$c_0 = \int_0^\infty w_\xi(x)\,dx = 1, \quad c_1 = \int_0^\infty (1-x)\,w_\xi(x)\,dx = 0,$$

$$c_2 = \int_0^\infty \left(1 - 2x + \frac{x^2}{2}\right) w_\xi(x)\,dx = \frac{m_2 - 2m_1^2}{2m_1^2},$$

$$c_3 = \int_0^\infty \left(1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}\right) w_\xi(x)\,dx = -\frac{m_3 - 9m_2 m_1 + 12m_1^3}{6m_1^3}.$$

Следовательно, первые члены разложения (2.91) представляются следующим образом:

$$w_\xi(x) = e^{-x}\left[1 + \left(\frac{m_2}{2m_1^2} - 1\right)\left(1 - 2x + \frac{x^2}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{m_3 - 9m_2 m_1 + 12m_1^3}{6m_1^3}\left(1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{}\right) + \ldots\right].$$

Разложение по полиномам Чебышева

Используется при ожидаемом подобии неизвестной плотности равномерному распределению.

Полиномы Чебышева:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n]/2,$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ |x| \leqslant 1.$$

В этом случае $\varphi(x) = [(1 - x^2)^{1/2}\pi]^{-1}$, $|x| \leqslant 1$.

Тогда

$$w_\xi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}\left[1 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(x)\right],$$

где $c_k = \sqrt{2}\int\limits_{-1}^{1} w_\xi(x) T_k(x)\,dx.$

$$c_1 = \sqrt{2}\int\limits_{-1}^{1} x\, w_\xi(x)\,dx = m_1\sqrt{2},$$

$$c_2 = \sqrt{2}\int\limits_{-1}^{1} (2x^2 - 1)\, w_\xi(x)\,dx = (2m_2 - 1)\sqrt{2},$$

$$c_3 = \sqrt{2}\int\limits_{-1}^{1} (4x^3 - 3x)\, w_\xi(x)\,dx = (4m_3 - 3m_1)\sqrt{2}.$$

Тогда первые члены разложения записываются в виде

$$w_\xi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}[1 + 2m_1 x + 2(2m_2 - 1)(2x^2 - 1) +$$
$$+ 2(4m_3 - 3m_1)(4x^3 - 3x) + \ldots].$$