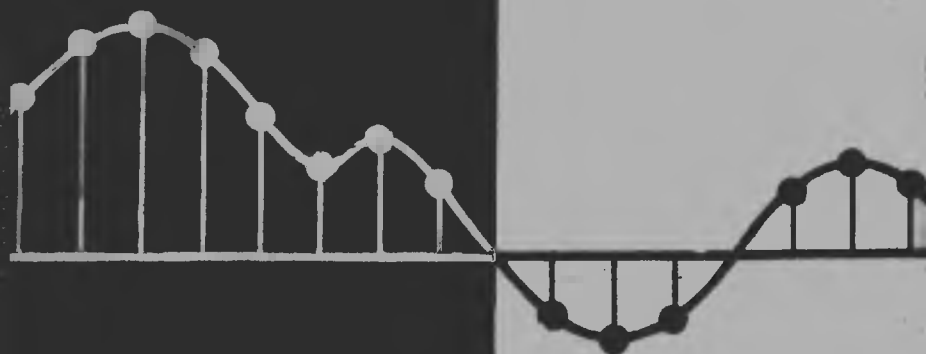


В.В. БЫКОВ
**ЦИФРОВОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
В СТАТИСТИЧЕСКОЙ
РАДИОТЕХНИКЕ**



В. В. БЫКОВ

**Цифровое моделирование
в статистической
радиотехнике**



ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКОЕ РАДИО»
МОСКВА — 1971

Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1971, 328 стр., т. 9 500 экз., ц. 1 р. 01 к.

В книге излагаются методы математического моделирования на универсальных электронных цифровых вычислительных машинах процессов, протекающих в радиосистемах. Приводятся экономичные алгоритмы для цифрового моделирования радиосигналов, радиопомех, широкого класса случайных процессов и процессов преобразования сигналов и помех при прохождении их через линейные и нелинейные системы. Рассматриваются примеры применения цифрового моделирования для решения задач статистической радиотехники.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся вопросами применения цифровой электронно-вычислительной техники при исследованиях в области статистической радиотехники, радиолокации, радиофизики, теории автоматического регулирования и в других отраслях науки и техники. Книга может быть полезна аспирантам и студентам старших курсов вузов.

5 табл., 53 рис., библи. 111 назв.

Предисловие

При решении многих конкретных задач в различных отраслях науки и техники часто встречаются случаи, когда аналитическое решение задачи ввиду значительных математических трудностей практически невозможно, а проведение экспериментальных исследований и натуральных испытаний требует весьма больших затрат времени и средств или же исключено по другим причинам. Одной из эффективных мер по преодолению этих трудностей является применение в исследованиях современных быстродействующих электронных цифровых вычислительных машин (ЦВМ) для моделирования изучаемых явлений.

Моделирование на ЦВМ, или цифровое моделирование, — это разновидность *математического моделирования*. Оно обладает рядом известных преимуществ перед другими методами исследований (универсальность, гибкость, экономичность) и позволяет в значительной мере разрешить одну из основных проблем современной науки — *проблему сложности*.

Известно успешное применение ЦВМ для моделирования производственных процессов [9], для исследования процессов переноса частиц в ядерной физике [10], при исследованиях объектов управления и автоматизации [19, 33], для расчета режимов энергосистем [33], для моделирования сетей связи [96], для создания мультипликационных фильмов [107] и в ряде других областей.

В данной монографии излагаются методы моделирования на универсальных ЦВМ процессов, протекающих в *радиосистемах*, применительно к решению задач в области статистической радиотехники, радиолокации, радиофизики, автоматики и др.

Радиотехнические процессы обладают рядом специфических свойств, главными из которых являются их *статистическая природа* и весьма *высокая скорость протекания* (электромагнитные колебания радиодиапазона волн). Из первого свойства вытекает необходимость при

разработке цифровых моделей уделять значительное внимание нахождению алгоритмов для формирования на ЦВМ широких классов *случайных процессов*, составляющих основу математических моделей радиосигналов, радиопомех и различного рода флюктуаций в радиотехнике. Второе из этих свойств приводит к тому, что воспроизведение процессов функционирования радиосистем даже на наиболее быстродействующих ЦВМ часто требует больших вычислительных затрат и возникают задачи отыскания *максимально экономичных алгоритмов*, моделирующих радиосигналы, радиопомехи и процессы преобразования их радиосистемами различных типов. Изложение методов решения этих двух главных задач и является основной целью книги.

Некоторые частные вопросы цифрового моделирования процессов в радиосистемах изложены в работах отечественных и зарубежных авторов [10, 49, 54, 55, 77, 109 и др.]. Однако в целом литературы на эту тему очень мало и многие из указанных вопросов освещены в ней недостаточно. Не нашли должного отражения в литературе вопросы: формирования на ЦВМ радиосигналов и радиопомех; моделирования случайных процессов, в частности ненормальных и нестационарных случайных процессов; моделирования на ЦВМ процессов преобразования сигналов и помех при прохождении их через линейные и нелинейные динамические системы, например через избирательные высокочастотные линейные системы и через нелинейные радиовстройства; погрешности дискретизации и выбора шага дискретизации; практической проверки на ЦВМ предлагаемых моделирующих алгоритмов, и ряд других. Учитывая, что интерес к методам моделирования процессов в радиосистемах возрастает по мере внедрения электронной вычислительной техники в практику научных исследований, в данной работе сделана попытка устранить указанный выше пробел. В книге поставлены следующие основные задачи.

1. Изложить принципы цифрового моделирования радиосигналов и радиопомех.

2. Указать экономичные способы цифрового моделирования типовых случайных процессов, имеющих широкое распространение в задачах статистической радиотехники, радиолокации, радиофизики, теории автоматического регулирования и других отраслях науки и техники.

3. Указать эффективные методы цифрового моделирования процессов преобразования сигналов и помех линейными и нелинейными системами.

Весь этот материал составляет содержание первой, второй и третьей глав соответственно. В заключительной четвертой главе приводятся примеры применения цифрового моделирования для решения некоторых задач статистической радиотехники.

В основу книги положены работы автора, опубликованные в периодической печати в течение последних лет [12—17]. Ряд результатов публикуется впервые, в частности способы моделирования ненормальных, нестационарных и многомерных случайных процессов, моделирование случайных полей, приемы цифрового детектирования, оценка погрешности дискретизации непрерывных процессов и систем и др. Кроме этого, в книге приведен в обработанном и систематизированном виде ряд известных результатов, относящихся к рассматриваемым здесь вопросам.

Настоящая книга является одной из первых попыток изложить методы цифрового моделирования в радиотехнике. Автор не ставил целью дать исчерпывающее изложение всех затронутых в книге вопросов. Он с благодарностью примет все замечания и предложения по улучшению книги.

Автор выражает глубокую признательность докт. техн. наук В. П. Малайчуку, который привлек внимание автора к рассматриваемым в книге вопросам, рецензентам: чл.-корр. АН СССР Н. П. Бусленко, докт. техн. наук Л. С. Гуткину и канд. техн. наук Ю. П. Борисову за ряд ценных предложений и замечаний, Л. К. Власовой, проделавшей большую работу по реализации задач на ЦВМ.

Введение

Задача цифрового моделирования радиосигналов, радиопомех и случайных процессов формулируется как задача нахождения алгоритмов (по возможности наиболее простых), позволяющих получать на ЦВМ дискретные реализации (выборочные функции) моделируемых процессов. Это самостоятельная и довольно сложная задача *синтеза* дискретных случайных процессов, имитирующих непрерывные процессы с заданными статистическими характеристиками. Она решается путем отыскания удобных для реализации на ЦВМ линейных и нелинейных преобразований, с помощью которых можно превратить независимые равномерно или нормально распределенные случайные числа, вырабатываемые датчиком случайных чисел, в случайные последовательности с требуемыми статистическими свойствами.

Задача цифрового моделирования радиосистем формулируется как задача разработки алгоритмов, которые по заданным характеристикам систем, например передаточным функциям и характеристикам нелинейности отдельных звеньев, позволяют точно или с допустимой погрешностью преобразовывать на ЦВМ дискретные реализации входных воздействий в дискретные реализации соответствующих выходных эффектов моделируемых систем. Эти алгоритмы называются *цифровыми моделями систем*.

Следует пояснить некоторые особенности цифрового моделирования радиосистем и принятого здесь подхода к моделированию.

Развитие теории моделирования вообще, а цифрового моделирования в частности, определяется степенью математического описания явлений и процессов, имеющих место в различных отраслях науки и техники. В отличие от некоторых других областей применения цифрового моделирования, например моделирования производственных процессов или же процессов в биологических системах, где математическое описание явлений часто

представляет собой весьма сложную задачу, математическое описание процессов функционирования радиосистем достаточно хорошо развито.

Действительно, основным назначением радиосистем является передача, прием и переработка информации, заключенной в сигналах. С информационной точки зрения радиосистемы можно рассматривать как специализированные вычислительные машины (обычно аналогового типа с весьма высоким быстродействием), точно или приближенно реализующие заранее предписанные алгоритмы работы (см. по этому поводу [21]). Входящие в эти алгоритмы операции, такие, как модуляция, фильтрация, усиление, преобразование частоты, детектирование, ограничение, накопление, слежение и т. д., как правило, допускают сравнительно простую математическую формулировку.

Математическое описание сводится при этом к переводу известной программы работы радиосистемы, сформулированной на обычном радиотехническом языке, на язык математики, на котором, например, фильтрация есть скользящее интегрирование, накопление — суммирование, амплитудное детектирование — выделение огибающей и т. д. В результате создается математическая модель радиосистемы. Цифровая модель системы получается на втором этапе, когда на основе математической модели разрабатывается дискретный алгоритм процесса функционирования объекта моделирования, предназначенный для реализации на ЦВМ.

Реализация цифровой модели радиосистемы на ЦВМ означает, по существу, замену специализированной вычислительной машины, которой является данная радиосистема, универсальной ЦВМ.

Подход к моделированию радиосистем как к замене одной вычислительной машины другой — это так называемый *функциональный принцип моделирования*, согласно которому модель считается эквивалентной оригиналу, если она с достаточной точностью воспроизводит лишь функцию оригинала, например алгоритм преобразования входных сигналов в выходные сигналы радиоприемного устройства. При этом модель и оригинал *не подобны в целом*, так как при моделировании опускаются несущественные с информационной точки зрения подробности, связанные, например с конкретным мате-

риальным воплощением моделируемой системы. Такой подход к моделированию целесообразен в ряде задач, например при выборе принципов построения радиосистем на этапе проектирования, при оценке помехоустойчивости схем (алгоритмов) обработки сигналов, при оценке эффективности помех и при других исследованиях.

Конечно, существуют задачи, при решении которых методом моделирования функциональный принцип нецелесообразен, например при исследовании влияния параметров реальных элементов (электровакуумных и полупроводниковых приборов, индуктивностей, емкостей, сопротивлений и т. д.), из которых состоит данное радиоустройство (блок), на его характеристики: передаточные функции, стабильность, линейность, динамический диапазон и т. д. В этих случаях нужно переходить на уровень более подробного моделирования. Такой подход к моделированию в зарубежной литературе называется применением ЦВМ для анализа и синтеза цепей [98, 99, 106]. В данной монографии эти методы цифрового моделирования не рассматриваются.

В ней приводятся методы цифрового моделирования, основанные на знании более обобщенных характеристик систем, чем характеристики их простейших элементов. В качестве таких обобщенных характеристик используются алгоритмы работы систем, следующие из их функционального назначения, передаточные функции или импульсные переходные характеристики линейных динамических звеньев, характеристики нелинейности нелинейных блоков, образующих систему, т. е. моделирование осуществляется на уровне функциональных, а не принципиальных схем систем.

Обычно моделируемые радиосистемы можно представить как комбинацию лишь двух основных типов звеньев — линейных инерционных звеньев (усилители, фильтры, следящие системы и т. д.) и нелинейных безынерционных звеньев (ограничители, детекторы, логические блоки и т. д.). Из этих двух типов функциональных единиц путем наращивания блок-схемы и варьирования характеристик звеньев строятся радиосистемы любой сложности. Алгоритмы для моделирования таких функциональных систем нетрудно найти, зная алгоритмы для моделирования отдельных звеньев систем.

Задача математического описания функционирования звеньев радиосистем не имеет однозначного решения. Например, линейную фильтрацию можно описать как процесс изменения амплитуд и фаз гармоник входного воздействия (метод Фурье) и как скользящее интегрирование входного процесса с некоторым весом (метод интеграла Дюамеля). В свою очередь, одной и той же математической модели могут соответствовать различные цифровые модели; например, процесс непрерывной фильтрации, заданный в виде интеграла Дюамеля, может быть представлен в дискретной форме как скользящее суммирование и как процесс вычисления в соответствии с рекуррентным разностным уравнением. В связи с этим основным направлением при разработке методов цифрового моделирования радиосистем является не столько математическое описание и создание их цифровых моделей вообще, сколько нахождение эквивалентных цифровых моделей и выбор среди них наиболее удобных для реализации на ЦВМ, т. е. наиболее эффективных с точки зрения выбранного критерия эффективности.

В качестве такого критерия используется в дальнейшем критерий *минимума вычислительных затрат* (минимального объема и времени вычислений) *при заданной точности моделирования*.

В книге изложены различные методы сокращения вычислительных затрат. Основными из них являются следующие.

1. Использование при моделировании сигналов, помех и процессов функционирования систем экономичных *рекуррентных* (марковских) алгоритмов, согласно которым очередное состояние объекта моделирования можно легко найти, зная одно или несколько его предыдущих состояний. (Этот метод имеет довольно большую область применения, так как многие процессы в радиосистемах являются либо строго, либо приближенно марковскими.)

2. Применение *метода огибающих* с целью исключения из рассмотрения высокочастотных составляющих несущей частоты.

3. *Эквивалентные преобразования функциональных схем систем* с целью получения более простых для моделирования *функционально подобных систем*.

4. *Разномасштабное моделирование* (использование малого шага дискретизации для быстроизменяющихся процессов и большого шага дискретизации для медленно изменяющихся процессов при моделировании систем, процессы в которых одновременно протекают в различных участках частотного диапазона) и *моделирование с переменным масштабом* (использование переменного шага дискретизации).

Применение указанных методов сближает по быстродействию цифровое и аналоговое моделирование. В других аспектах цифровое и аналоговое моделирование радиосистем могут иметь различную эффективность, определяемую достоинствами и недостатками цифровых и аналоговых вычислительных машин.

Однако там, где требуется иметь универсальный аппарат для моделирования разнообразных систем: дискретных автоматов, непрерывных и дискретных динамических систем (линейных и нелинейных с постоянными, переменными, сосредоточенными и распределенными параметрами), систем массового обслуживания и т. д., там, где требуется высокая точность, развитая логика, наличие эффективной системы памяти, большой динамический диапазон величин, цифровое моделирование имеет существенные преимущества перед аналоговым.

К недостаткам цифрового моделирования в настоящее время следует отнести: сравнительно невысокое быстродействие, несовершенную еще систему связи «человек — машина» (недостаточно наглядная регистрация результатов, трудности изменения параметров и структуры моделируемой системы в процессе решения задачи), высокую стоимость часа машинного времени. Однако есть основания считать, что в дальнейшем, по мере совершенствования электронной цифровой вычислительной техники и методов ее математического обеспечения, указанные недостатки будут устранены. Некоторые дополнительные преимущества и недостатки цифрового моделирования отмечены в ходе изложения материала.

Аналоговое моделирование осуществляется более просто, превосходит в ряде случаев цифровое моделирование по быстродействию, отличается большей наглядностью, экономически более выгодно, однако оно имеет невысокую точность, сравнительно небольшой динамический диапазон и не столь универсально. Этот вид моде-

лирования наиболее эффективно применяется как известно [40, 52], при исследовании непрерывных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Недостатки аналогового моделирования могут быть компенсированы в комбинированных аналого-цифровых моделях [42].

В данной книге речь будет идти лишь о цифровом моделировании, однако некоторые рассматриваемые в ней методы могут быть использованы и при аналоговом, а также при аналого-цифровом моделировании, например метод формирующего фильтра при моделировании случайных сигналов.

В дальнейшем вместо термина «цифровое моделирование», как правило, будет использоваться термин «моделирование».

Поскольку в книге рассматриваются методы математического моделирования, то в ней «много математики». Однако для понимания материала от читателя требуется не столько знаний математики в ее строгом классическом смысле, сколько знаний «радиоматематики», по терминологии С. М. Рытова [71], и «математики контуров», по терминологии Вудворда [22], а также вопросов прикладной теории случайных процессов и статистической радиотехники в объеме соответствующих глав книг [50, 80]. Кроме этого от читателя требуется знать некоторые основы математического аппарата теории дискретных систем, в частности основные свойства z -преобразования [85], возможности ЦВМ и принципы программирования [38].

В книге не приводятся блок-схемы возможных программ для реализации на ЦВМ моделирующих алгоритмов. Алгоритмы даны в формульном виде. Для пояснения формульных алгоритмов приводятся передаточные функции и структурные схемы дискретных фильтров, осуществляющих операции над входными числовыми последовательностями в точном соответствии с предлагаемыми алгоритмами.

1.1. Постановка задачи

Математическими моделями радиосигналов, радиопомех и различных комбинаций сигналов и помех являются, вообще говоря, случайные функции времени (случайные процессы), которые можно представить в следующем достаточно общем виде:

$$u(t) = F_t[s_1(t, x_1, x_2, \dots), s_2(t, y_1, y_2, \dots), \dots, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots], \quad (1.1)$$

где t — непрерывное или дискретное время; $s_1(t, x_1, x_2, \dots)$, $s_2(t, y_1, y_2, \dots)$, ... — функции со случайными параметрами; $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, ... — случайные процессы (шумы) с заданными свойствами; F_t — символ некоторого преобразования, зависящего в общем случае от времени.

Реализации (выборочные функции) случайного процесса являются детерминированными функциями

$${}^k u(t) = F_t[s_1(t, {}^k x_1, {}^k x_2, \dots), s_2(t, {}^k y_1, {}^k y_2, \dots), \dots, {}^k \xi_1(t), {}^k \xi_2(t), \dots],$$

где ${}^k x_1, {}^k x_2, \dots, {}^k y_1, {}^k y_2, \dots, {}^k \xi_1(t), {}^k \xi_2(t), \dots$ — реализации соответствующих случайных величин и случайных процессов; k — номер реализации.

Функции $s_1(t)$, $s_2(t)$, ... со случайными параметрами являются разновидностью случайных процессов, отличающихся способом их задания. В дальнейшем будем их называть *параметрически заданными* случайными процессами в отличие от случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, ..., заданных другими способами, например с помощью многомерных распределений, и называемых просто случайными процессами. Параметрически заданные случайные процессы, у которых случайные параметры статистически независимы между собой, будем

называть непосредственно заданными случайными процессами.

Параметры $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ могут быть как непрерывными, так и дискретными случайными величинами; предполагается, что статистические характеристики их известны, т. е. известны плотности распределения вероятностей $\psi(x_1, x_2, \dots), \psi(y_1, y_2, \dots)$, в дальнейшем называемые также функциями плотности.

Преобразование f включает в себя операции, осуществляемые при различных видах модуляции, операции, описывающие взаимодействие сигналов и помех, например суммирование в случае аддитивной смеси, и т. д.

Практически любое колебание, наблюдаемое в некоторой точке радиотракта, может быть представлено в форме (1.1).

Целью моделирования радиосигналов и радиопомех является воспроизведение на ЦВМ случайных процессов вида (1.1), математически описывающих радиосигналы и радиопомехи.

Воспроизведение на ЦВМ случайных процессов с дискретным временем означает получение значений этих процессов, относящихся к соответствующим дискретным моментам времени.

Воспроизведение на ЦВМ процессов с непрерывным временем, строго говоря, невозможно ввиду дискретной природы цифровой машины. Однако процесс $u(t)$ с непрерывным временем можно с любой наперед заданной точностью заменить соответствующим процессом $u(n\Delta t)$ с дискретным временем $t_n = n\Delta t$ (рис. 1.1), где Δt — определенный, разумно выбранный, шаг дискретизации процесса; n — целочисленный аргумент. В результате случайному процессу $u(t)$ будет поставлена в соответствие случайная последовательность $u[n] = u(n\Delta t)$ *, а его непрерывным реализациям ${}^k u(t)$ ** — дискретные реализации

$$\begin{aligned} {}^k u[n] &= F_{n\Delta t} [s_1(n\Delta t, {}^k x_1, {}^k x_2, \dots), s_2(n\Delta t, {}^k y_1, {}^k y_2, \dots), \dots, \\ {}^i \xi_1(n\Delta t), {}^i \xi_2(n\Delta t), \dots] &= F_n [s_1[n, {}^i x_1, {}^i x_2, \dots], s_2[n, {}^i y_1, {}^i y_2, \dots], \\ &\dots, {}^i \xi_1[n], {}^i \xi_2[n], \dots]. \end{aligned}$$

*) Здесь и далее заключение целочисленного аргумента в квадратные скобки означает, что речь идет о дискретной функции.

**) Здесь и в дальнейшем понятие непрерывности используется в качестве противоположного понятию дискретности, а не понятию разрывности, как это принято в математическом анализе

Случайную последовательность $u[n]$, порождаемую случайным процессом $u(t)$ с непрерывным временем или же непосредственно изображающую случайный процесс $u(t)$ с дискретным временем, будем называть дискретной (цифровой)* моделью сигналов, помех или их комбинаций.

Задачу моделирования сигналов и помех сформулируем как задачу отыскания алгоритмов, позволяющих формировать на ЦВМ их дискретные реализации.

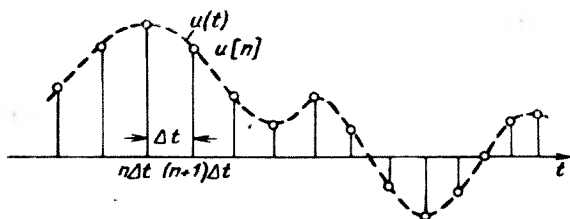


Рис. 1.1.

Следует более подробно пояснить смысл этой задачи. Как уже отмечалось, сигналы и помехи являются случайными процессами, следовательно, задача их цифрового моделирования сводится к нахождению способов формирования на ЦВМ дискретных реализаций соответствующих случайных процессов. В современных электронных цифровых вычислительных машинах источником случайности являются датчики случайных чисел, позволяющие вырабатывать реализации независимых случайных чисел с одинаковым, обычно равномерным или нормальным, распределением. Последовательное обра-

* Строго говоря, между дискретными и цифровыми системами, как это принято в теории автоматического управления [85], существует различие, состоящее в том, что в цифровых системах кроме квантования по времени присутствует также квантование по уровню, возникающее при преобразовании непрерывных величин в числа определенной разрядности. Квантование по уровню сопровождается так называемой погрешностью округления. В дальнейшем, поскольку речь идет о применении универсальных электронных цифровых вычислительных машин, обладающих высокой точностью вычислений, предполагается, что погрешность округления пренебрежимо мала. Поэтому между терминами «дискретная модель» и «цифровая модель» различия не делается.

щение к такому датчику можно рассматривать как процесс формирования реализации стационарной последовательности независимых случайных чисел или, другими словами, реализации дискретного белого шума. Система независимых одинаково распределенных случайных величин и дискретный белый шум — это те две (а по существу, одна) довольно элементарные модели случайных процессов, реализации которых можно в настоящее время формировать на ЦВМ непосредственно. Для формирования на ЦВМ дискретных реализаций более сложных случайных процессов, входящих в математические модели радиосигналов и радиопомех, требуется разработка специальных алгоритмов, которые выражают дискретные реализации моделируемых процессов в виде некоторого доступного для осуществления на ЦВМ преобразования реализаций независимых случайных величин.

Таким образом, задача моделирования случайных сигналов и помех состоит в переходе от обычной формы задания случайных процессов (например, с помощью многомерных распределений) к такой форме задания, при которой дискретные реализации случайных процессов выражаются *в явном* (по возможности наиболее простом) виде через реализации независимых случайных величин (реализации дискретного белого шума). По-другому задачу моделирования случайных процессов, изображающих сигналы и помехи, можно сформулировать как задачу нахождения для этих процессов эквивалентных непосредственно заданных случайных процессов. Именно в этом смысле понимается в дальнейшем задача моделирования случайных процессов.

Ниже рассматриваются возможные способы решения этой задачи.

1.2. Моделирование непрерывных детерминированных процессов

Это наиболее простой случай, когда все реализации моделируемого процесса $u(t)$ совпадают. Алгоритм формирования последовательности $u[n]$ зависит от того, каким образом задана функция $u(t)$. Если функция $u(t)$ задана в виде аналитического выражения, то последовательность $u[n]$ вырабатывается в соответствии с этим выражением. При вычислении $u[n]$ могут быть использова-

ны арифметические и логические операции, предусмотренные в данной ЦВМ, а также стандартные подпрограммы для вычисления элементарных и специальных функций.

Если функция $u(t)$ задана графически или таблицей, то она либо аппроксимируется каким-нибудь аналитическим выражением и последовательность $u[n]$ формируется описанным выше способом, либо в памяти ЦВМ хранятся ее табличные значения и при формировании $u[n]$ производится выборка из таблиц. В последнем случае необязательно совпадение шага дискретизации процесса $u(t)$ по времени и табличного шага, так как программа выборки из таблиц легко может быть построена с учетом интерполяции функции (см., например, [58]).

Выборку из таблиц целесообразно производить также и при моделировании тех периодических функций, формирование значений которых требует громоздких вычислений (примером могут служить тригонометрические функции). При этом в памяти ЦВМ хранятся заранее вычисленные значения функции для дискретных моментов времени в пределах только одного периода. Программой предусматривается периодическая выборка из таблиц в соответствии с периодическим изменением функции. При моделировании тригонометрических функций использование такого приема вместо обращения к стандартным подпрограммам может сократить время вычисления приблизительно на порядок.

В заключение этого параграфа укажем на возможность применения рекуррентных алгоритмов в целях экономии вычислений при моделировании экспоненциальных и тригонометрических функций.

Пусть требуется формировать на ЦВМ дискретную экспоненту

$$u[n] = e^{an}.$$

Учитывая, что $e^{an} = e^a e^{a(n-1)}$, можно записать

$$u[n] = \rho u[n-1], \quad u[0] = 1, \quad (1.2)$$

где $\rho = e^a$. Следовательно, дискретную экспоненту можно формировать путем умножения ее предыдущего значения на постоянный множитель (дискретная экспонента — это геометрическая прогрессия).

Пусть теперь требуется формировать на ЦВМ одновременно дискретную синусоиду и косинусоиду:

$$u_1[n] = \sin an, \quad u_2[n] = \cos an.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sin an &= \sin [a(n-1) + a] = \sin [a(n-1)] \cos a + \\ &+ \cos [a(n-1)] \sin a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos an &= \cos [a(n-1) + a] = \cos [a(n-1)] \cos a - \\ &- \sin [a(n-1)] \sin a, \end{aligned}$$

приходим к следующему рекуррентному алгоритму:

$$\begin{aligned} u_1[n] &= cu_1[n-1] + su_2[n-1], & u_1[0] &= 0, \\ u_2[n] &= cu_2[n-1] - su_1[n-1], & u_2[0] &= 1, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $c = \cos a$, $s = \sin a$.

Применение алгоритмов (1.2) и (1.3), так же как и использование выборки из таблиц, примерно на порядок сокращает время вычисления дискретных экспоненциальных и тригонометрических функций по сравнению со временем вычисления их по стандартным подпрограммам. Приведенные алгоритмы экономичны, кроме того, по количеству требуемых ячеек памяти.

Алгоритмы (1.2) и (1.3) могут быть, очевидно, использованы и при моделировании функций, представляющих собой комбинации из экспонент, синусоид и косинусоид; например дискретную тангенсоиду можно формировать путем деления $u_1[n]$ на $u_2[n]$ в процессе реализации алгоритма (1.3).

Выражения (1.2) и (1.3) будут неоднократно использованы в дальнейшем.

1.3. Моделирование функций, зависящих от случайных параметров и случайных процессов

Рассмотрим сначала функцию $u(t)$, зависящую лишь от одного случайного параметра. При фиксированном значении этого параметра процесс выработки реализации случайной функции не отличается от детерминированного случая. Каждому конкретному значению случайного параметра соответствует конкретная реализация. Выработка возможных значений случайного параметра произ-

водится известными методами получения случайных величин с заданным законом распределения [10, 11, 23]. Основные методы моделирования случайных величин рассмотрены в § 1.4.

Если функция $u(t)$ содержит N случайных статистически независимых параметров, то для формирования ее дискретных реализаций производится выборка возможных значений N случайных величин в соответствии с их законами распределения. Задача моделирования при этом в принципе не отличается от задачи моделирования процессов с одним случайным параметром и не встречает особых трудностей, так как в обоих случаях речь идет о моделировании непосредственно заданных случайных процессов.

Наибольшие трудности встречаются при моделировании тех радиосигналов и радиопомех, математические модели которых содержат либо множество случайных параметров, статистически зависящих между собой и заданных многомерным законом распределения вероятностей, либо случайные процессы, не являющиеся непосредственно заданными [случайные процессы $\xi_i(t)$ в выражении (1.1)], либо то и другое. Дело в том, что получение эффективных алгоритмов для формирования на ЦВМ выборочных значений статистически зависящих между собой случайных параметров, т. е. реализаций случайных векторов, и дискретных реализаций случайных процессов по их многомерным законам распределения является довольно сложной задачей. Дальнейшие же преобразования этих реализаций в соответствии с математическими моделями сигналов и помех, т. е. согласно общей формуле (1.1), очевидны.

Вопросы формирования на ЦВМ случайных векторов и, в частности, реализаций случайных процессов рассмотрены в § 1.5 и 1.6. Основной материал по вопросам цифрового моделирования случайных процессов помещен во второй главе.

1.4. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

Исходным материалом для формирования на ЦВМ случайных величин с различными законами распределения служат равномерно распределенные в интервале

(0, 1) случайные числа, которые вырабатываются на ЦВМ программным или же физическим датчиком случайных чисел.

Существуют различные приемы преобразования случайных чисел с равномерным распределением в случайные числа с заданным законом распределения [10, 23]. Так, например, в качестве нормально распределенных случайных чисел можно использовать сумму нескольких независимых случайных чисел с равномерным распределением (приближение основано на центральной предельной теореме теории вероятностей, в силу которой сумма независимых случайных величин при весьма общих условиях имеет асимптотически нормальное распределение).

Рассмотрим сначала общие приемы получения случайных чисел с заданным законом распределения из равномерно распределенных случайных чисел.

1. Метод нелинейного преобразования, обратного функции распределения

Пусть $w(y)$ — функция плотности, $W(y) = \int_{-\infty}^y w(z) dz$ —

функция распределения вероятностей случайной величины y , а $W^{-1}(x)$ — функция, обратная функции $W(y)$. Тогда случайная величина $y = W^{-1}(x)$ имеет заданный закон распределения $w(y)$, если случайная величина x равномерно распределена в интервале (0, 1) [10].

Например, случайную величину с *релеевским законом распределения*, у которой функция плотности, функция распределения, среднее значение и дисперсия имеют соответственно вид

$$w(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-y^2/2\sigma^2}, \quad y \geq 0; \quad W(y) = 1 - e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0;$$

$$m_y = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma; \quad \sigma_y^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2; \quad (1.4)$$

где σ — параметр распределения, можно получить путем следующего преобразования равномерно распределенной в интервале (0, 1) случайной величины x :

$$y = \sigma \sqrt{-2 \ln(1-x)} = \sigma \sqrt{-2 \ln x}$$

(переход от $\ln(1-x)$ к $\ln x$ в последней формуле основан на том, что случайные величины $1-x$ и x имеют здесь одинаковые законы распределения).

Аналогично случайную величину с *показательным законом распределения*, у которой

$$\begin{aligned} \omega(y) &= \lambda e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0; & W(y) &= 1 - e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0; \\ m_y &= \sigma_y = \frac{1}{\lambda}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

можно сформировать путем преобразования $y = -\frac{1}{\lambda} \ln x$.

Путем преобразований

$$y = b \sin \pi \left(x - \frac{1}{2} \right) + a, \quad y = b \operatorname{tg} \pi \left(x - \frac{1}{2} \right) + a \quad (1.6)$$

можно сформировать случайные числа, распределенные по *закону арксинуса* и *закону Коши* соответственно:

$$\begin{aligned} \omega(y) &= \frac{1}{\pi b \sqrt{1 - (y-a)^2/b^2}}; \\ W(y) &= \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{y-a}{b} + \frac{1}{2}; \\ m_y &= a; \quad \sigma_y^2 = b^2/2; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\omega(y) = \frac{1}{\pi b [1 + (y-a)^2/b^2]};$$

$$W(y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-a}{b} + \frac{1}{2}; \quad m_y = a; \quad \sigma_y^2 = \infty.$$

Используя свойство симметрии тригонометрических функций, нетрудно убедиться, что закон распределения случайных величин y , формируемых согласно алгоритмам (1.6), не изменится, если аргумент $\pi(x-1/2)$ у тригонометрических функций заменить аргументом $2\pi x$.

К сожалению, не всегда существуют элементарные преобразования для получения случайных величин с заданным законом распределения из равномерно распределенных случайных чисел. В частности, у случайных величин с нормальным распределением функция, обратная функции распределения, не выражается в замкну-

том виде через элементарные функции. В этих случаях для формирования случайных величин с заданным распределением используются различные аппроксимации функции $W^{-1}(y)$ [10, 23].

2. Метод Неймана

Для моделирования случайных величин, возможные значения которых не выходят за пределы некоторого ограниченного интервала (a, b) (случайные величины с усеченными законами распределения), а также случайных величин, законы распределения которых можно аппроксимировать усеченными, достаточно универсальным является метод Неймана [103], состоящий в следующем.

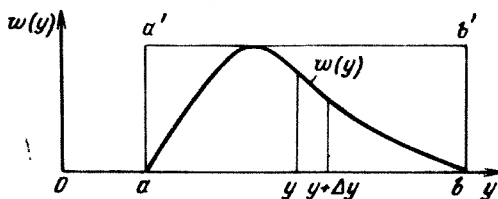


Рис. 1.2.

Из датчика равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$ случайных чисел независимо выбираются пары чисел ${}^h x_1, {}^h x_2$, из которых формируются преобразованные пары ${}^h x^*_1 = a + (b-a){}^h x_1$, ${}^h x^*_2 = \omega_m {}^h x_2$, где (a, b) — интервал возможных значений случайной величины y с заданной функцией плотности $w(y)$; ω_m — максимальное значение функции $w(y)$. В качестве реализации случайной величины берется число ${}^h x^*_2$ из тех пар ${}^h x^*_1, {}^h x^*_2$, для которых выполняется неравенство

$${}^h x^*_2 \leq w({}^h x^*_1). \quad (1.8)$$

Пары, не удовлетворяющие неравенству (1.8), выбрасываются.

Нетрудно убедиться в справедливости такого метода моделирования случайных величин. Действительно, пары случайных чисел x^*_1, x^*_2 можно рассматривать как координаты случайных точек плоскости, равномерно распределенных вдоль осей y и $w(y)$ внутри прямоугольника $aa'b'b$ (рис. 1.2). Пары x^*_1, x^*_2 , удовлетворяющие усло-

вию (1.8), — это координаты случайных точек плоскостей, равномерно распределенных вдоль осей y и $\omega(y)$ внутри той части прямоугольника $aa'b'b$, которая расположена под кривой $\omega(y)$. Вероятность того, что случайная точка плоскости, находящаяся под кривой $\omega(y)$, окажется в элементарной полосе с основанием $(y, y + \Delta y)$, очевидно, пропорциональна $\omega(y)$, а вероятность попадания точки под кривую $\omega(y)$ по условию равна единице, что и требуется.

3. Метод кусочной аппроксимации

Существуют различные приближенные приемы моделирования случайных величин: численное решение уравнения $x = W(y)$ относительно y при использовании метода нелинейного преобразования, обратной функции распределения; замена непрерывных распределений соответствующими дискретными распределениями, для которых можно указать достаточно простые моделирующие алгоритмы, и другие приемы [10, 23]. Среди них универсальным и наиболее простым является метод кусочной аппроксимации, предложенный Н. П. Бусленко [11].

Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть требуется получить случайную величину y с функцией плотности $\omega(y)$. Предположим, что область возможных значений величины y ограничена интервалом (a, b) (неограниченное распределение можно приближенно заменить ограниченным). Разобьем интервал (a, b) на n достаточно малых интервалов (a_m, a_{m+1}) , $m = \overline{0, n-1}$, $a_0 = a$, $a_n = b$, так, чтобы распределение заданной случайной величины в пределах этих интервалов можно было довольно точно аппроксимировать каким-нибудь простым распределением, например равномерным, трапецеидальным и т. д. В дальнейшем рассмотрим кусочную аппроксимацию равномерным распределением (рис. 1.3).

Пусть P_m — вероятность попадания случайной величины y в каждый из интервалов (a_m, a_{m+1}) . Получать реализации величины y с кусочно-равномерным распределением можно, очевидно, в соответствии со следующей схемой преобразования случайных чисел: 1) случайным образом с вероятностью P_m выбирается интервал (a_m, a_{m+1}) ; 2) формируется реализация ${}^h\Delta y_m$ случайной величины, равномерно распределенной в интерва-

ле $(0, a_{m+1}-a_m)$; 3) искомая реализация ${}^k y$ получается по формуле

$${}^k y = a_m + {}^k \Delta y_m.$$

Случайный выбор интервала (a_m, a_{m+1}) с вероятностью P_m означает, по существу, моделирование дискретной случайной величины, принимающей n значений a_m , $m=0, n-1$, с вероятностью P_m каждое, что можно сделать достаточно просто [11]. Интервал $(0, 1)$ разбивается на n интервалов (x_m, x_{m+1}) , $m=0, n-1$, $x_0=0$, $x_n=1$, длиной $x_{m+1}-x_m=P_m$ каждый. Из датчика случайных

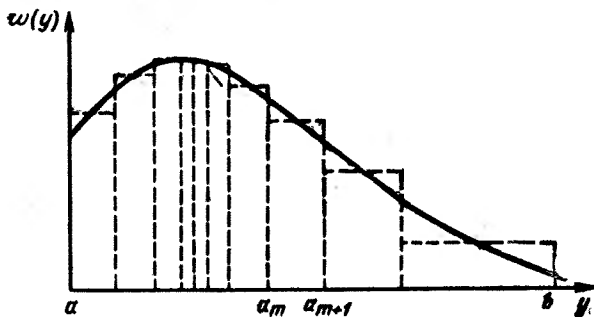


Рис. 1.3.

равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$ чисел выбирается некоторая реализация ${}^k x$. Путем последовательного сравнения ${}^k x$ с x_m определяется тот интервал (x_m, x_{m+1}) , в котором оказывается ${}^k x$.

В основу этого процесса положен очевидный факт: вероятность попадания равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$ случайной величины в некоторый подынтервал (x_m, x_{m+1}) равна длине этого подынтервала. Рассмотренный выше процесс представляет интерес не только как составной элемент метода кусочной аппроксимации, он широко используется в качестве алгоритма для моделирования дискретных случайных величин и случайных событий [10, 11].

Для моделирования случайных величин методом кусочной аппроксимации наиболее удобно при машинной реализации выбирать вероятности попадания во все интервалы (a_m, a_{m+1}) одинаковыми ($P_m=1/n$), а число n таким, что $n=2^N$, где N — целое число, меньше или рав-

ное количеству двоичных разрядов чисел, вырабатываемых датчиком случайных чисел [10, 11]. В этом случае величины a_m должны быть выбраны такими, чтобы

$$\int_{a_m}^{a_{m+1}} w(y) dy = \frac{1}{n} = 2^{-N}.$$

При равенстве вероятностей P_m для случайного выбора индекса m можно использовать первые N разрядов числа, извлекаемого из датчика равномерно распределенных случайных чисел.

Используя рассмотренный прием, приходим к следующему способу преобразования равномерно распределенных случайных чисел в случайные числа с заданным законом распределения.

Из датчика равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$ случайных чисел извлекается пара реализаций ${}^k x_1, {}^k x_2$. Первые $N = \log_2 n$ разрядов числа ${}^k x_1$ используются для нахождения адресов ячеек, в которых хранятся величины a_m и a_{m+1} , а затем по формуле

$${}^k y = a_m + {}^k x_2 (a_{m+1} - a_m)$$

получается реализация ${}^k y$ случайной величины y с заданным законом распределения. Такой алгоритм является довольно экономичным по количеству требуемых операций, которое не зависит от числа n , т. е. не зависит от точности кусочной аппроксимации. Однако с увеличением точности аппроксимации возрастает количество ячеек памяти, требуемое для хранения величин a_m , $m = \overline{0, n}$, что является недостатком рассмотренного метода, в особенности при больших n .

4. Некоторые специальные методы моделирования случайных величин

Для моделирования случайных величин с заданным законом распределения можно использовать и другие свойства преобразований случайных чисел. Известно, например, что распределение произведения двух независимых случайных величин, одна из которых имеет релеевское распределение (1.4), а другая распределена по закону арксинуса (1.7) с параметрами $(0, 1/2)$, т. е. с ну-

левым средним значением и дисперсией, равной $1/2$, является *нормальным* [37, 50]. Это позволяет формировать нормальную случайную величину путем следующего преобразования системы двух независимых равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$ случайных чисел x_1 и x_2 :

$$y = \sigma \sqrt{-2 \ln x_1} \sin 2\pi x_2. \quad (1.9)$$

Параметры получаемой этим способом нормальной случайной величины будут $(0, \sigma^2)$.

Для моделирования случайных величин с некоторыми законами распределения иногда удобно использовать преобразования нормально распределенных случайных чисел. Так, например, случайные величины с релеевским и показательным законами распределения (1.4) и (1.5) можно получить путем преобразования системы двух независимых нормальных случайных чисел x_1 и x_2 с параметрами $(0, \sigma^2)$ в виде

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (1.10)$$

$$y = x_1^2 + x_2^2 \quad (1.11)$$

соответственно. При этом для релеевского распределения (1.4) параметр b будет совпадать с параметром σ исходного нормального распределения, а для показательного распределения (1.5) параметр λ связан с параметром σ исходного нормального распределения соотношением $\lambda = 1/2\sigma^2$.

Алгоритмы (1.10) и (1.11) основаны на известных свойствах преобразований нормальных случайных величин [50]. Немного изменив эти алгоритмы, можно моделировать случайные величины с другими распространенными законами распределения, а именно, обобщая формулы (1.10) и (1.11) в виде

$$y = \sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2}, \quad y = \sum_{k=1}^m x_k^2, \quad (1.12)$$

где x_k — нормальные случайные числа с параметрами $(0, \sigma^2)$, получим алгоритмы для моделирования случайных величин с *законом распределения Райса* и *законом*

распределения χ^2 с m степенями свободы соответственно:

$$\omega(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2 + a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{ay}{\sigma^2}\right), \quad y \geq 0;$$

$$\omega(y) = \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(m/2) \sigma^2} \left(\frac{y}{\sigma^2}\right)^{m/2-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0,$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

5. Заключительные замечания

Существует довольно большое количество методов моделирования случайных величин. В данном параграфе изложены основные из них, при этом преследовалась цель рассмотреть в первую очередь принципиальную сторону вопроса и привести примеры алгоритмов для моделирования случайных величин с распространенными законами распределения. Более подробные сведения о цифровом моделировании случайных величин читатель найдет в специальных руководствах [10, 23].

Ниже дается краткая сравнительная характеристика рассмотренных методов моделирования случайных величин и некоторые рекомендации для выбора того или иного метода при решении конкретных задач.

Если в задаче требуется высокая точность воспроизведения законов распределения случайных величин, то целесообразно использовать алгоритмы, не обладающие методической погрешностью. К ним относятся алгоритмы типа (1.4) — (1.7), (1.9) — (1.11), погрешностью которых обычно можно пренебречь, так как она определяется лишь погрешностью выполнения на ЦВМ необходимых нелинейных преобразований и отклонением закона распределения исходных случайных чисел от равномерного (нормального). Примером систем, при моделировании которых может потребоваться высокая точность воспроизведения законов распределения случайных величин, являются системы обнаружения радиосигнала с низкой вероятностью ложной тревоги (порядка 10^{-5} — 10^{-6}) [55].

Другим достоинством указанных алгоритмов является простота подготовительной работы, так как преобразования равномерного закона в требуемый закон распределения даются в виде готовых аналитических зависи-

мостей. Такого вида алгоритмы, кроме того, позволяют легко изменять форму закона распределения в процессе моделирования случайных величин, закон распределения которых зависит от переменных параметров. Например, изменение в процессе моделирования функции плотности случайной величины, распределенной по закону Райса, сводится к изменению по соответствующему закону только параметра a в алгоритме (1.12).

Основным недостатком этих алгоритмов является сравнительно низкое быстродействие, так как осуществление на ЦВМ нелинейных преобразований часто требует довольно большого количества элементарных операций.

В задачах, не предъявляющих высоких требований к качеству случайных величин, для сокращения количества элементарных операций рекомендуется использовать более экономичные приближенные методы. Из них хорошие результаты дает метод кусочной аппроксимации.

1.5. Моделирование случайных векторов по заданным многомерным распределениям

Задачи моделирования на ЦВМ случайных векторов и случайных процессов, заданных на конечном интервале времени $(0, T)$, в принципе не отличаются, так как дискретные реализации случайных процессов, ограниченных во времени, можно рассматривать как выборочные значения N -мерных случайных векторов, где $N = T/\Delta t$.

Существует два основных метода моделирования на ЦВМ случайных векторов с заданным многомерным распределением.

1. Метод условных распределений

Этот метод дает универсальный алгоритм [10, 11], позволяющий в принципе моделировать многомерные случайные величины с произвольно заданной многомерной функцией плотности. Алгоритм основан на рекуррентном вычислении условных плотностей вероятностей для координат формируемого вектора. Пусть случайный вектор задан своей N -мерной функцией плотности $w(x_1, \dots, x_N)$. Рассмотрим сначала двумерный случай, когда вектор имеет всего лишь две координаты x_1 и x_2 . Одномерная функция плотности случайной величины x_1 имеет вид

$$w(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2) dx_2. \quad (1.13)$$

Используя описанные выше способы моделирования случайных величин с заданным законом распределения, сформируем реализацию 1x_1 случайной величины x_1 с функцией плотности (1.13). Затем найдем условное распределение случайной величины x_2 :

$$w(x_2 | {}^1x_1) = w({}^1x_1, x_2) / w({}^1x_1),$$

произведем выборку 1x_2 случайной величины x_2 с функцией плотности $w(x_2 | {}^1x_1)$ и т. д. Полученная таким путем последовательность пар чисел ${}^kx_1, {}^kx_2, k=1, 2, \dots$, будет иметь совместную функцию плотности $w(x_1, x_2)$.

Аналогичные соотношения имеют место и для многомерных векторов. Например, если задана совместная функция плотности $w(x_1, x_2, x_3)$ трехмерного вектора, то выборка троек чисел осуществляется в соответствии с функциями плотности

$$w(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3,$$

$$w(x_2 | {}^kx_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w({}^kx_1, x_2, x_3) dx_3 / w({}^kx_1), \quad (1.14)$$

$$w(x_3 | {}^kx_1, {}^kx_2) = w({}^kx_1, {}^kx_2, x_3) / w({}^kx_1) w({}^kx_2 | {}^kx_1).$$

Описанный прием позволяет в принципе моделировать многомерные случайные величины с произвольно заданной функцией плотности. Однако практическое использование этого способа связано с весьма громоздкими вычислениями, за исключением тех, сравнительно редких случаев, когда интегралы в выражениях типа (1.13), (1.14) берутся в конечном виде. В противном случае приходится прибегать к приближенным вычислениям. При больших значениях N эти вычисления, как правило, оказываются также очень громоздкими и совершенно непригодны для практического использования [10].

Значительно более приемлемым для практической реализации является метод Неймана [103] (см. § 1.4), обобщенный на многомерный случай [23].

2. Метод Неймана

Пусть $w(y_1, \dots, y_N)$ — N -мерная функция плотности случайного вектора $\|y_k\|$ $k = \overline{1, N}$ с областью определения (a_k, b_k) случайных координат $y_k, k = \overline{1, N}$. По аналогии с одномерным случаем для формирования реализаций вектора $\|y_k\|$ $k = \overline{1, N}$ на ЦВМ вырабатывается $N+1$ случайных чисел x_1, x_{N+1} , равномерно распределенных в интервалах $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_N, b_N), (0, \omega_m)$ соответственно, где ω_m — максимальное значение функции $w(y_1, \dots, y_N)$.

В качестве реализаций случайного вектора $\|y_k\|_{k=1, N}$, распределенного по закону $\omega(y_1, \dots, y_N)$, берутся реализации случайного вектора $\|x_k\|_{k=1, N}$, удовлетворяющие условию $x_{N+1} \leq \omega(x_1, \dots, x_N)$.

Реализации случайных чисел x_1, x_{N+1} , не удовлетворяющие этому условию, выбрасываются.

Идея метода такая же, как и в одномерном случае (1.4), с той лишь разницей, что здесь имитируются случайные точки, равномерно распределенные не на плоскости под кривой $\omega(\hat{y})$ (см. рис. 1.2), а в $N+1$ -мерном объеме под N -мерной поверхностью $\omega(y_1, \dots, y_N)$.

1.6. Моделирование случайных векторов в рамках корреляционной теории

С практической точки зрения способы получения возможных значений составляющих случайного вектора в рамках корреляционной теории оказываются более приемлемыми, чем в рамках многомерных распределений. Эти способы (первые) применимы в тех моделях, в которых достаточно обеспечить лишь заданную матрицу корреляционных моментов случайных векторов (или заданную корреляционную функцию при моделировании случайных процессов). Значение этих способов возрастает в связи со следующими обстоятельствами.

Во-первых, нормальные случайные векторы и процессы, играющие очень важную роль в приложениях, однозначно задаются матрицей корреляционных моментов, и, следовательно, моделирование их в рамках корреляционной теории равносильно моделированию по заданным многомерным распределениям.

Во-вторых, ненормальные случайные векторы часто появляются в результате некоторых преобразований нормальных случайных векторов. Назовем такие ненормальные векторы *квазинормальными*. Моделирование квазинормальных случайных векторов сводится к моделированию нормальных случайных векторов с последующим воспроизведением заданного преобразования и может быть осуществлено в рамках многомерных распределений, для чего, очевидно, достаточно обеспечить лишь необходимые корреляционные связи исходных нормальных векторов. Примером квазинормальных случайных векто-

ров является последовательность значений огибающей суммы гармонического сигнала и узкополосного нормального шума. Эта последовательность подчинена, как известно, многомерному закону распределения Райса (при отсутствии сигнала — многомерному закону распределения Релея). Огибающая легко выражается через квадратурные составляющие колебания, распределение которых нормальное.

В-третьих, многомерные законы распределения случайных векторов, не являющихся нормальными или квазинормальными, весьма трудно получить теоретически и экспериментально. Исключение составляют лишь ненормальные случайные процессы, которые являются (или могут считаться) марковскими случайными процессами невысокого порядка; их многомерные распределения найти сравнительно несложно [78]. Корреляционные же моменты обычно определяются значительно проще. Поэтому практически в этих случаях многомерные законы распределения, как правило, неизвестны, и задача моделирования случайных векторов имеет смысл лишь в рамках корреляционной теории.

Рассмотрим возможные методы моделирования на ЦВМ многомерных случайных векторов в рамках корреляционной теории.

1. Метод линейного преобразования

Это один из наиболее известных методов формирования реализаций случайных векторов [10, 11]. Основная идея его состоит в том, чтобы, выработав N независимых случайных величин x_1, x_N с параметрами $(0, 1)$, подвергнуть их такому линейному преобразованию A , после которого полученные величины y_1, y_N имели бы наперед заданную корреляционную матрицу

$$\|R\| = \|R_{nm}\|_{\substack{m=1, N \\ n=1, N}} = \|M\{y_n y_m\}\|_{\substack{m=1, N \\ n=1, N}},$$

где M — символ математического ожидания.

Известно [48], что произвольное линейное преобразование A N -мерного вектора $\|x\|$ сводится к умножению его на некоторую матрицу N -го порядка:

$$\|y\| = \|A\| \|x\|, \quad (1.15)$$

где $\|x\| = \|x_n\|_{n=1, N}$, $\|y\| = \|y_n\|_{n=1, N}$ — матрицы-столбцы с элементами x_1, x_N, y_1, y_N соответственно; $\|A\| = \|a_{nm}\|_{\substack{m=1, N \\ n=1, N}}$ — квадратная матрица преобразования.

Выберем матрицу преобразования $\|A\|$ треугольной, тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \\ &\dots \dots \dots \\ y_N &= a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Элементы a_{nm} матрицы $\|A\|$ найдем из условий:

$$M\{y_n y_m\} = R_{nm}, \quad M\{x_n x_m\} = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (1.17)$$

Из условий

$$\begin{aligned} M\{y_1^2\} &= a_{11}^2 = R_{11}, \\ M\{y_1 y_2\} &= a_{11} a_{21} = R_{12}, \\ M\{y_2^2\} &= a_{21}^2 + a_{22}^2 = R_{22} \end{aligned} \quad (1.18)$$

получим

$$a_{11} = \sqrt{R_{11}}; \quad a_{21} = R_{12}/\sqrt{R_{11}}; \quad a_{22} = \sqrt{R_{22} - R_{12}^2/R_{11}}. \quad (1.19)$$

Аналогично можно найти:

$$a_{31} = R_{13}/\sqrt{R_{11}}; \quad a_{32} = \frac{R_{23} - R_{12}R_{13}/R_{11}}{\sqrt{R_{22} - R_{12}^2/R_{11}}}; \quad (1.20)$$

$$a_{33} = \sqrt{R_{33} - \frac{R_{13}^2}{R_{11}} - \frac{(R_{23} - R_{12}R_{13}/R_{11})^2}{R_{22} - R_{12}^2/R_{11}}}.$$

Действуя таким образом, можно последовательно определить элементы всей матрицы $\|A\|$. Тогда алгоритм выработки реализаций случайного вектора с заданной корреляционной матрицей сведется к умножению реализаций вектора с независимыми случайными координатами на матрицу $\|A\|$. Составляющие вектора $\|y\|$ будут

иметь нулевое среднее значение. Вектор с ненулевым средним значением получается путем сложения $\|y\| + \|m_y\|$, где $\|m_y\|$ — вектор-столбец средних значений случайного вектора $\|y\|$.

Операция умножения матрицы на вектор выполняется на ЦВМ по стандартной программе. Можно построить стандартную программу и для вычисления элементов матрицы $\|A\|$ по заданной корреляционной матрице.

Отметим, что рассмотренный процесс моделирования позволяет получить лишь необходимые корреляционные связи между координатами случайного вектора. Законы распределения координат не принимаются во внимание, поэтому законы распределения координат исходного вектора могут быть произвольными, например равномерными. Требуется только, чтобы случайные координаты x_n вектора $\|x\|$ удовлетворяли условию (1.17). Если законы распределения координат исходного вектора принять нормальными, то искомым вектор также будет нормальным (нормальный закон, как известно, инвариантен по отношению к линейному преобразованию).

Рассмотренный способ образования возможных значений случайного вектора при больших N становится неудобным для машинной реализации, потому что запоминание элементов матрицы требует очень большого объема оперативной памяти [$N(N+1)/2$ ячеек] и большого объема вычислений.

Поэтому в ряде случаев оказывается более удобным моделирование случайных векторов по каноническому разложению соответствующих этим векторам случайных процессов [28, 68].

2. Метод канонических разложений

Пусть непрерывный центрированный случайный процесс $\xi(t)$ задан каноническим разложением

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t), \quad (1.21)$$

где V_k — некоррелированные случайные коэффициенты с параметрами $(0, \sigma_k)$; $\varphi_k(t)$, $k=1, 2, \dots$ — система некоторых детерминированных координатных функций.

Из условия некоррелированности коэффициентов V_k следует аналогичное каноническое разложение корреляционной функции случайного процесса $\xi(t)$:

$$R(t, t') = M\{\xi(t)\xi(t')\} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \varphi_k(t) \varphi_k(t'). \quad (1.22)$$

Задание случайного процесса в виде канонического разложения — это и есть параметрическое задание случайного процесса, о котором шла речь в § 1.1.

Моделирование случайного процесса, заданного каноническим разложением, осуществляется довольно просто: в процессе формирования дискретных реализаций $\xi[n]$ (в процессе выработки координат случайного вектора) они вычисляются по формуле (1.21) непосредственно. При этом в качестве V_k используются выборочные значения некоррелированных случайных величин с параметрами $(0, \sigma_k)$. Бесконечный ряд (1.21) при вычислениях приближенно заменяется усеченным конечным рядом.

Подготовительная работа при моделировании случайных векторов методом канонических разложений заключается в выборе системы координатных функций и в нахождении дисперсий σ^2 , т. е. в осуществлении непосредственно канонического разложения. Часто в качестве координатных функций выбирают систему ортонормированных функций, т. е. функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Разложение случайного процесса в ряд с некоррелированными коэффициентами по ортонормированной системе функций всегда может быть произведено (теорема Карунена — Лоева). При этом дисперсии находятся как собственные значения, а функции $\varphi_k(t)$ — как собственные функции интегрального уравнения [28, 68]

$$\int_{(T)} R(t, t') \varphi(t') p(t') dt' = \lambda \varphi(t), \quad (1.23)$$

где T — интервал разложения (в том числе и $T = \infty$); $p(t')$ — произвольная неотрицательная функция веса.

К сожалению, разложение (1.21), полученное с помощью (1.23), больше применяется при теоретических

исследованиях, а практическое использование его затруднено, так как не существует достаточно простого общего способа решения интегральных уравнений вида (1.23). Сравнительно несложное решение можно получить лишь в некоторых специальных случаях, например для стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.

Существуют приближенные способы получения канонических разложений случайных процессов. Среди них наиболее удобным для моделирования случайных векторов и случайных процессов является способ канонического разложения случайных функций в дискретном ряде точек, предложенный В. С. Пугачевым. Описание этого способа и порядок его практического использования дается в [68, § 58, 59]. Мы приведем здесь лишь окончательный алгоритм вычисления дисперсий σ_k^2 некоррелированных случайных коэффициентов V_k и координатных функций $\varphi_k(t)$ в разложении (1.21).

Пусть задан случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R(t, t')$ и пусть на временной оси задана последовательность точек $t_n, n = \overline{1, N}$, (не обязательно равностоящих). Требуется аппроксимировать случайный процесс $\xi(t)$ случайным процессом $\xi^*(t)$, представленным в виде разложения (1.21) и таким, что его корреляционная функция $R^*(t, t')$ совпадает с $R(t, t')$ в заданных дискретных точках, т. е.

$$R^*(t_n, t'_m) = R(t_n, t'_m), \quad n = \overline{1, N}, m = \overline{1, N}.$$

Такому условию, как показано в [68], удовлетворяет каноническое разложение с конечным числом слагаемых, равным числу дискретных точек N :

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N V_k \varphi_k(t), \quad (1.24)$$

причем дисперсии коэффициентов и координатные функции в разложении (1.24) могут быть найдены по следующим рекуррентным формулам:

$$\sigma_1^2 = R(t_1, t'_1), \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{\sigma_1^2} R(t, t'_1),$$

$$\sigma_k^2 = R(t_k, t'_k) - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i^2 \varphi_i(t_k), \quad k = \overline{2, N}, \quad (1.25)$$

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sigma_k^2} \left[R(t, t'_k) - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i^2 \varphi_i(t) \varphi_i(t_k) \right], \quad k = \overline{2, N}.$$

Существенным достоинством данного способа является то, что он позволяет получить каноническое разложение с помощью обычных алгебраических операций, не прибегая к решению интегральных уравнений, и особенно удобен при небольшом числе дискретных точек. При большом числе дискретных точек данный способ требует довольно громоздких вычислений.

Корреляционная функция случайного процесса, каноническое разложение которого получается по формулам (1.25), в промежутках между дискретными точками, вообще говоря, не совпадает с корреляционной функцией исходного процесса. Однако если дискретные точки выбираются так, что значения процесса в этих точках имеют высокую корреляцию между собой, то совпадение корреляционных функций в промежуточных точках будет достаточно хорошим. Это позволяет использовать процесс $\xi^*(t)$ не только для формирования значений процесса $\xi(t)$ в заданных дискретных точках, но и в промежуточных точках.

Пусть требуется формировать на ЦВМ значения процесса $\xi(t)$ только в заданных N дискретных точках t_n , т. е. требуется получать выборочные значения N -мерного вектора

$$\|y\| = \|y_n\|_{n=\overline{1, N}} = \|\xi(t_n)\|_{n=\overline{1, N}} = \|\xi[n]\|, \quad n = \overline{1, N},$$

с корреляционной матрицей

$$\|R\| = \|R_{nm}\|_{\substack{m=\overline{1, N} \\ n=\overline{1, N}}} = R[n, m], \quad n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, N},$$

где $R[n, m] = M\{\xi[n]\xi[m]\}$ — корреляционная функция дискретного случайного процесса $\xi[n] = \xi(t_n)$. Используя данное каноническое разложение, получим следующий моделирующий алгоритм:

$$y_n = \xi[n] = \sum_{k=1}^N V_k \varphi_k[n], \quad (1.26)$$

в котором дисперсии σ_k^2 некоррелированных случайных коэффициентов V_k и дискретные координатные функции $\varphi_k [n]$ находятся из соотношений:

$$\sigma_1^2 = R [1, 1], \quad \varphi_1 [n] = \frac{1}{\sigma_1^2} R [n, 1],$$

$$\sigma_k^2 = R [k, k] - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i^2 \varphi_i^2 [k], \quad k = \overline{2, N}, \quad (1.27)$$

$$\varphi_k [n] = \frac{1}{\sigma_k^2} \left[R [n, k] - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i^2 \varphi_i [n] \varphi_i [k] \right], \quad k = \overline{2, N}.$$

Алгоритм (1.26) можно записать в виде

$$y_n = \sum_{k=1}^N \sigma_k x_k \varphi_k [n], \quad (1.28)$$

где $\overline{x_1, x_N}$ — некоррелированные случайные величины с параметрами $(0, 1)$.

Если моделируемый процесс является нормальным, то, положив закон распределения случайных коэффициентов V_k в каноническом разложении по данному способу нормальным, придем к алгоритму, позволяющему точно, т. е. в рамках многомерных распределений, а не в рамках корреляционных приближений, формировать на ЦВМ дискретные реализации стационарных и нестационарных нормальных случайных процессов, заданных на конечном интервале времени.

При формировании по этому способу реализаций случайных векторов подготовительная работа по объему вычислительных затрат примерно такая же, что и при формировании случайных векторов с помощью линейного преобразования, описанного выше. Однако необходимое количество ячеек памяти в данном способе может быть значительно меньшим. Это имеет место в тех случаях, когда координатные функции $\varphi_k (t)$ удается выразить достаточно простыми аналитическими выражениями. В противном случае значения N координатных функций в N дискретных точках потребуется запоминать в виде таблиц. Поскольку при этом нужно помнить еще N дис-

персий σ_k^2 коэффициентов V_k , то всего в общем случае потребуется $N(N+1)$ ячеек.

Сходство рассматриваемого способа моделирования случайных векторов со способом линейного преобразования является не только внешним. Оказывается (в этом проще всего можно убедиться на примерах), что алгоритм (1.16) и алгоритм (1.28), в котором σ_k^2 и $\varphi_k[n]$ определяются по формулам (1.27), в точности совпадают, т. е. $a_{11} = \sigma_1 \varphi_1[1]$, $a_{21} = \sigma_1 \varphi_1[2]$, $a_{22} = \sigma_2 \varphi_2[2]$ и т. д.

Таким образом, формулы (1.27) являются разновидностью формул (1.19) для вычисления элементов a_{nm} матрицы преобразования A .

3. Метод разложения в ряд Фурье

Для стационарных случайных процессов наиболее простым частным случаем общего ортогонального разложения (1.27) на конечном интервале $(0, T)$ является разложение, в котором собственными функциями являются синусы и косинусы (разложение случайных процессов в ряд Фурье). Каноническое разложение случайного процесса имеет при этом вид

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.29)$$

где V_k, U_k — случайные амплитуды гармоник; $\omega_k = k\omega_1$ — частоты гармоник, кратные основной частоте ω_1 .

При $-\infty < t < \infty$ реализации случайного процесса (1.29) являются периодическими функциями с периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Предполагается, что период T_1 в общем случае не совпадает с интервалом разложения T и его нужно выбрать. Сделать выбор величины T_1 и найти алгоритм канонического разложения (1.29) позволяют следующие соображения.

Поскольку коэффициенты V_k, U_k некоррелированы, то корреляционная функция случайного процесса (1.29) согласно общей формуле (1.22) имеет вид

$$R(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty} D\{V_k\} \cos \omega_k t \cos \omega_k t' + D\{U_k\} \sin \omega_k t \sin \omega_k t',$$

где $D\{V_k\}, D\{U_k\}$ — дисперсии коэффициентов V_k и U_k .

При равенстве дисперсий в парах коэффициентов V_k и U_k с одинаковым индексом случайный процесс (1.29) является стационарным в широком смысле, так как его корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов t и t' :

$$\begin{aligned}
 R(t, t') &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 (\cos \omega_k t \cos \omega_k t' + \sin \omega_k t \sin \omega_k t') = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \cos \omega_k (t - t') = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \cos \omega_k \tau = R(\tau),
 \end{aligned}$$

где $\tau = t - t'$. При этом корреляционная функция $R(\tau)$ является периодической с периодом T_1 , равным периоду процесса $\xi(t)$, а дисперсии σ_k^2 равны коэффициентам разложения корреляционной функции $R(\tau)$ в ряд Фурье по косинусам.

Изменениям аргумента корреляционной функции $R(\tau)$ в пределах периода, т. е. от $-T_1/2$ до $T_1/2$, соответствует изменение времени t и t' в пределах полупериода, т. е. в пределах интервала длиной $T_1/2$.

Все это подсказывает следующий путь канонического разложения стационарного случайного процесса в ряд вида (1.29) на интервале $(0, T)$.

Зная величину интервала разложения T , находим коэффициенты разложения корреляционной функции $R(\tau)$ заданного процесса в ряд Фурье по косинусам на удвоенном интервале $(-T, T)$ по формулам:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau) d\tau, \\
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T R(\tau) \cos k\omega_1 \tau d\tau, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{T}, \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Полученные коэффициенты a_k принимаем в качестве дисперсий σ_k^2 коэффициентов V_k и U_k в искомом разложении.

Если величина интервала T выбрана такой, что при $|\tau| \geq T$ значения корреляционной функции равны нулю или пренебрежимо малы, то верхний предел в интегралах

лах (1.30) можно положить равным бесконечности. Тогда

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \frac{G(0)}{2T},$$

$$\sigma_k^2 = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos k\omega_1 \tau d\tau = \frac{G(k\omega_1)}{T}, \quad k=1, 2, \dots$$

где $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau$

— энергетический спектр моделируемого случайного процесса. Следовательно, в этих случаях дисперсии σ_k^2 с точностью до множителя совпадают со значениями функции спектральной плотности $G(\omega)$ моделируемого случайного процесса в точках $\omega_k = k\omega_1 = k\pi/T$, $k=0, 1, \dots$. Это при известной функции спектральной плотности делает процесс вычисления дисперсий σ_k^2 весьма простым.

Заметим, что при разложении нормального случайного процесса в ряд (1.29) коэффициенты V_k и U_k будут нормальными случайными величинами.

Рассматриваемый метод моделирования стационарных случайных процессов достаточно прост по своей подготовительной работе. После получения дисперсий σ_k^2 дискретные реализации случайного процесса при постоянном шаге дискретизации $\Delta t = T/N$ формируются согласно алгоритму

$$\xi[n] = \sum_{k=0}^m V_k \cos \frac{k\pi n}{N} + U_k \sin \frac{k\pi n}{N}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (1.31)$$

где V_k и U_k — некоррелированные случайные числа с параметрами $(0, \sigma_k^2)$.

Разложение (1.29) можно, конечно, использовать и для получения дискретных реализаций процессов в неравноотстоящих точках.

Число слагаемых в формуле (1.31) практически целесообразно выбирать из условия

$$1 - \frac{1}{R(0)} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 < \varepsilon,$$

где ϵ — достаточно малая величина. Это неравенство выражает тот факт, что сумма дисперсий σ_k^2 должна быть равна дисперсии моделируемого процесса.

При моделировании нормальных случайных процессов распределение коэффициентов V_k и U_k должно быть нормальным. В этих случаях иногда удобно представить алгоритм (1.31) в виде

$$\xi[n] = \sum_{k=0}^m E_k \cos\left(\frac{k\pi n}{N} + a_k\right), \quad (1.32)$$

где E_k — случайные коэффициенты с релейевским распределением (1.4), у которого параметр σ равен σ_k ; a_k — случайные фазы гармоник, независимые от E_k и распределенные равномерно в интервале $(0, 2\pi)$.

Интересно заметить, что если в разложении (1.32) коэффициенты E_k выбрать неслучайными, т. е. положить

$$\xi_1[n] = \sum_{k=0}^m C_k \cos\left(\frac{k\pi n}{N} + a_k\right) \quad (1.33)$$

и выбрать значения C_k из условия $C_k^2 = 2\sigma_k^2$, оставив фазы случайными равномерно распределенными в интервале $(0, 2\pi)$, то корреляционные функции процессов $\xi[n]$ и $\xi_1[n]$ будут одинаковыми. Этот факт положен в основу метода моделирования, описанного в [105].

Алгоритм (1.33) требует меньшего объема вычислений, чем алгоритмы (1.31) и (1.32), так как содержит в два раза меньше случайных коэффициентов, реализации которых необходимо формировать на ЦВМ при моделировании. Однако алгоритм (1.33) не позволяет, строго говоря, формировать реализации случайных процессов с нормальным распределением, хотя при большом числе слагаемых с приблизительно равными коэффициентами в силу центральной предельной теоремы закон распределения формируемого процесса будет близок к нормальному.

Недостатком рассмотренного способа моделирования является необходимость учета большого числа слагаемых в формулах (1.31) — (1.33), когда интервал разложения T во много раз превышает время корреляции $\tau_{\text{кор}}$ моделируемого процесса. Последнее объясняется тем, что при $T/\tau_{\text{кор}} \gg 1$ ряд (1.29) сходится, вообще говоря, мед-

ленно и, следовательно, для получения приемлемой точности в сумме (1.29) приходится учитывать большое число слагаемых.

Алгоритмы (1.31)—(1.33) включают в себя операции вычисления тригонометрических функций, для выполнения которых на ЦВМ используются стандартные программы, насчитывающие десятки элементарных операций. Это также увеличивает объем вычислений и снижает эффективность алгоритмов (1.31)—(1.33).

Если память машины достаточна, то для сокращения объема вычислений при многократном формировании реализаций случайных векторов значения тригонометрических функций в дискретных точках, однажды вычисленные, можно запомнить и использовать в готовом виде для дальнейших вычислений (см. § 1.2).

При постоянном шаге дискретизации объем вычислений можно значительно уменьшить, если исключить многократные вычисления тригонометрических функций от аргументов вида $\frac{k\pi n}{N}$, $n=1, \overline{N}$, используя рекуррентный алгоритм (1.3).

При этом достаточно вычислить лишь значения тригонометрических функций при $n=1$, т. е. $c_k[1] = \cos \frac{k\pi}{N}$ и $s_k[1] = \sin \frac{k\pi}{N}$ для всех k . Коэффициенты $c_k[1]$ и $s_k[1]$, в свою очередь, можно также вычислять рекуррентно для $k=2, \overline{m}$, зная $c_1[1] = \cos \frac{\pi}{N}$ и $s_1[1] = \sin \frac{\pi}{N}$.

Использование рекуррентных формул (1.3) вместо прямого вычисления тригонометрических функций на каждом шаге сокращает количество элементарных операций для формирования реализации случайного процесса по алгоритмам (1.31)—(1.33) на порядок и более в зависимости от того, сколько элементарных операций насчитывают программы вычисления тригонометрических функций.

1.7. Погрешность восстановления непрерывных сигналов по дискретным данным

При выборе шага дискретизации непрерывных процессов, в частности сигналов и помех, необходимо оценить погрешность замены непрерывных процессов дис-

кретными. В настоящем параграфе рассматриваются вопросы оценки этой погрешности.

Пусть непрерывный процесс $u(t)$ изображается на ЦВМ в виде последовательности его значений $u[n] = u(n\Delta t)$ в равноотстоящих точках $t_n = n\Delta t$. Ясно, что дискретный процесс лишь приближенно изображает непрерывный процесс. Требуется найти количественную меру этого приближения, т. е. найти *погрешность дискретизации*. Величина погрешности дискретизации, очевид-

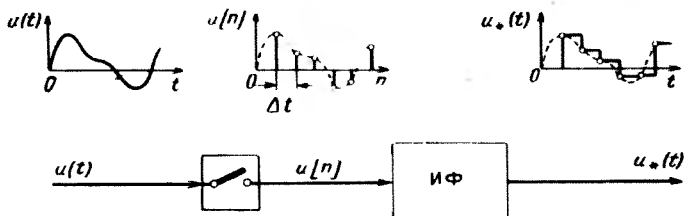


Рис. 1.4.

но, зависит от того, что понимается под погрешностью. Определение погрешности дискретизации зависит от той задачи, в которой используется дискретный процесс вместо непрерывного. При рассмотрении некоторой конкретной задачи погрешность дискретизации целесообразно определить как величину отклонения результата ее решения при использовании дискретного процесса от результата решения этой же задачи при использовании непрерывного процесса. Поскольку задачи могут быть самыми разнообразными, то определить заранее, к чему может привести дискретизация, не представляется возможным. Поэтому обычно под погрешностью дискретизации процессов понимается та погрешность, с которой может быть восстановлен непрерывный процесс по его дискретным значениям, т. е. понимается погрешность *в задаче интерполяции* непрерывного процесса по дискретным точкам.

Восстановление непрерывного процесса $u(t)$ по соответствующему ему дискретному процессу $u[n]$ обычно можно представить как пропускание последовательности «мгновенных» импульсов (δ -функций) с огибающей $u[n]$ и периодом Δt через линейный интерполирующий фильтр (ИФ) (восстанавливающий элемент) с некоторой

импульсной переходной характеристикой (интерполирующей функцией) $k_0(t)$. Этому соответствует схема восстановления, показанная на рис. 1.4. Она содержит ключ, замыкающийся в моменты времени $t_n = n\Delta t$, и интерполирующий фильтр (восстановление как процесс прерывания и сглаживания [49]). В результате восстановления образуется сигнал

$$u_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] k_0(t - n\Delta t). \quad (1.34)$$

В соответствии с данной схемой осуществляется восстановление процессов при наиболее распространенных

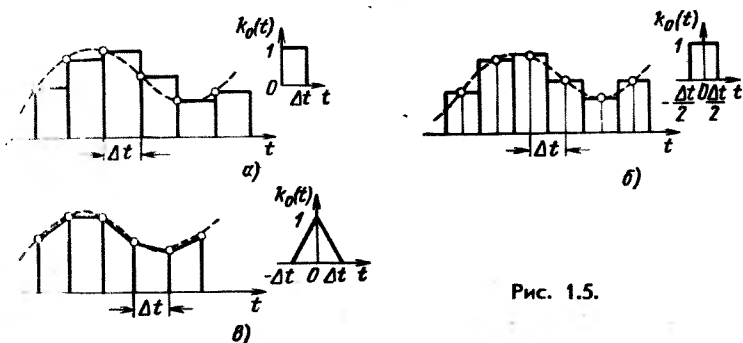


Рис. 1.5.

видах интерполяции: ступенчатой несимметричной и симметричной (метод прямоугольников, рис. 1.5, а, б), линейной (метод трапеций, рис. 1.5, в) и др.

Ошибку интерполяции

$$\Delta u(t) = u(t) - u_*(t) \quad (1.35)$$

можно рассматривать как выходной сигнал схемы, представленной на рис. 1.6, при воздействии на входе сигнала $u(t)$.

Ниже найдены достаточно простые общие выражения для корреляционной функции, энергетического спектра и дисперсии ошибки $\Delta u(t)$ в предположении, что $u(t)$ — стационарный центрированный случайный процесс. Из общих соотношений в качестве примеров выведены частные соотношения, соответствующие наиболее распространенным типам интерполирующих фильтров.

Аналогичная задача, но иными методами, решалась в работах [18, 26, 36, 72, 81]. Однако в них получены более сложные, а в ряде случаев лишь частные и приближенные решения. Здесь предложен новый подход к рас-

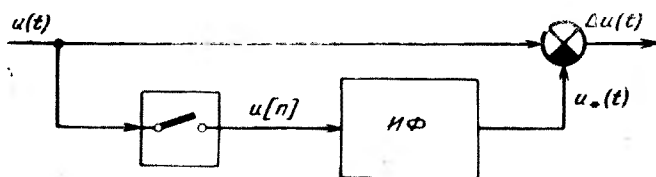


Рис. 1.6.

сматриваемой задаче, позволяющий найти ее общее точное решение, отличающееся, кроме того, тем, что из него следует простое решение задачи оптимизации характеристик интерполирующих фильтров по критерию минимума среднеквадратической ошибки интерполяции.

1. Основные соотношения

Ошибка интерполяции $\Delta u(t)$ при принятых условиях является нестационарным случайным процессом. Корреляционная функция этой ошибки по определению равна

$$R_{\Delta}(t, \tau) = M \{ \Delta u(t) \Delta u(t + \tau) \}. \quad (1.36)$$

На практике удобно пользоваться усредненной по аргументу t корреляционной функцией [83]. В данном случае функция $R_{\Delta}(t, \tau)$ будет, очевидно, периодической по аргументу t с периодом Δt , поэтому для получения усредненной корреляционной функции $R_{\Delta}(\tau)$ достаточно усреднить $R_{\Delta}(t, \tau)$ в интервале $(0, \Delta t)$:

$$R_{\Delta}(\tau) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} R_{\Delta}(t, \tau) dt. \quad (1.37)$$

Выразим корреляционную функцию $R_{\Delta}(\tau)$ через корреляционную функцию $R(\tau)$ исходного случайного процесса, шаг дискретизации Δt и интерполирующую функцию $k_0(t)$.

Подставив в (1.37) выражения (1.34) — (1.36) и учитывая свойство линейности операции статистического усреднения, после простых преобразований получим

$$\begin{aligned}
 R_{\Delta}(\tau) = & \dot{R}(\tau) + \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R[n-m] \int_0^{\Delta t} k_0(t-n\Delta t) \times \\
 & \times k_0(t+\tau-m\Delta t) dt - \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\Delta t} R(t-n\Delta t) k_0(t+\tau-n\Delta t) dt - \\
 & - \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\Delta t} R(t+\tau-n\Delta t) k_0(t-n\Delta t) dt. \quad (1.38)
 \end{aligned}$$

Выражение (1.38) путем замены переменной интегрирования по формуле $t-n\Delta t=\theta$, а переменной суммирования в двойной сумме по формуле $n-m=i$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 R_{\Delta}(\tau) = & R(\tau) + \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} k_0(\theta) k_0(\theta+\tau- \\
 & - m\Delta t) d\theta - \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} R(\theta) k_0(\theta+\tau) d\theta - \\
 & - \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} R(\theta+\tau) k_0(\theta) d\theta. \quad (1.39)
 \end{aligned}$$

Полученное выражение упрощается, если воспользоваться очевидным тождеством

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta$$

и обозначить операцию свертки двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ следующим образом:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\theta) f_2(t-\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\theta) f_2(\theta) d\theta,$$

$$R_{\Delta}(\tau) = R(\tau) + \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] g_0(\tau - m\Delta t) - \\ - \frac{1}{\Delta t} R(\tau) * k_0(\tau) - \frac{1}{\Delta t} R(\tau) * k_0(-\tau), \quad (1.40)$$

где $g_0(\tau) = k_0(\tau) * k_0(-\tau)$. При записи предпоследнего слагаемого в формуле (1.40) использовано свойство четности функции $R(\tau)$.

Используя известные теоремы о парах функций, сопряженных по Фурье (см., например, [22]), в частности равенство Пуассона, нетрудно найти общее выражение для энергетического спектра ошибки интерполяции, имеющей корреляционную функцию (1.39):

$$G_{\Delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\Delta}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = G(\omega) + \frac{1}{\Delta t} \Phi(\omega) |K_0(j\omega)|^2 - \\ - \frac{1}{\Delta t} G(\omega) K_0(j\omega) - \frac{1}{\Delta t} G(\omega) K_0(-j\omega) = \\ = G(\omega) \left[1 - \frac{2}{\Delta t} \operatorname{Re} K_0(j\omega) \right] + \frac{1}{\Delta t} \Phi(\omega) |K_0(j\omega)|^2, \quad (1.41)$$

где $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ — энергетический спектр исходного случайного процесса $u(t)$;

$$\Phi(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] e^{-j\omega\Delta t m} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(\omega - 2m\omega_c)$$

— энергетический спектр дискретного случайного процесса $u[n]$; $\omega_c = \pi/\Delta t$ — частота дискретизации;

$$K_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_0(t) e^{-j\omega t} dt$$

— спектр интерполирующей функции $k_0(t)$ (частотная характеристика интерполирующего фильтра).

Положив в формуле (1.40) $\tau=0$, получим выражение для средней за период Δt дисперсии ошибки интерполяции

$$\sigma_{\Delta}^2 = R_{\Delta}(0) = \sigma^2 + \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] g_0[m] - \\ - \frac{2}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} R(\theta) k_0(\theta) d\theta,$$

где $g_0[m] = g_0(m\Delta t)$; $\sigma^2 = R(0)$ — дисперсия исходного случайного процесса.

С другой стороны,

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{\Delta}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ G(\omega) \left[1 - \frac{2}{\Delta t} \operatorname{Re} K_0(j\omega) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta t} \Phi(\omega) |K_0(j\omega)|^2 \right\} d\omega. \quad (1.42)$$

Относительная среднеквадратическая ошибка интерполяции, определяемая как $\Delta_0^2 = \sigma_{\Delta}^2 / \sigma^2$, имеет вид

$$\Delta_0^2 = 1 + \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r[m] g_0[m] - \frac{2}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} r(\theta) k_0(\theta) d\theta, \quad (1.43)$$

где $r(\tau) = R(\tau) / \sigma^2$ — коэффициент корреляции исходного случайного процесса.

Представляет интерес значение спектральной плотности ошибки интерполяции на нулевой частоте $G_{\Delta}(0)$. Согласно (1.41)

$$G_{\Delta}(0) = G(0) \left[1 - \frac{2}{\Delta t} K_0(0) \right] + \frac{1}{\Delta t} \Phi(0) K_0^2(0), \quad (1.44)$$

т. е. спектральная плотность ошибки на нулевой частоте для всех интерполирующих фильтров с одинаковым коэффициентом передачи на нулевой частоте $K_0(0)$ одинакова.

У наиболее распространенных типов интерполирующих фильтров, как будет показано ниже (см. табл. 1.1), коэффициенты $K_0(0)$ равны.

2. Оптимальные интерполирующие фильтры

Используя формулу (1.42), нетрудно найти оптимальную частотную характеристику интерполирующего фильтра, обеспечивающую минимальную ошибку интерполяции. Действительно, минимизация дисперсии ошибки σ_{Δ}^2 сводится, очевидно, к минимизации спектральной плотности ошибки $G_{\Delta}(\omega)$ при всех ω . Обозначив $x = \operatorname{Re} K_0(j\omega)$, $y = \operatorname{Im} K_0(j\omega)$, спектральную плотность можно представить в виде

$$G_{\Delta} = G \left(1 - \frac{2}{\Delta t} x \right) + \frac{\Phi}{\Delta t} (x^2 + y^2).$$

Минимум величины G_{Δ} как функции от x, y имеет место при $x = G/\Phi$ и $y = 0$ (в этом легко убедиться, решая систему уравнений $\partial G_{\Delta}/\partial x = 0, \partial G_{\Delta}/\partial y = 0$ относительно x и y).

Таким образом, оптимальная частотная характеристика интерполирующего фильтра имеет вид

$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{G(\omega)}{\Phi(\omega)} \quad (1.45)$$

При этом согласно (1.42) и (1.45) минимальная ошибка интерполяции процесса равна

$$\sigma_{\Delta\text{опт}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \left[1 - \frac{G(\omega)}{\Delta t \Phi(\omega)} \right] d\omega. \quad (1.46)$$

Частотная характеристика $K_{\text{опт}}(j\omega)$ — вещественная неотрицательная четная функция, так как таковыми являются функции $G(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ в выражении (1.45). Следовательно, оптимальная интерполирующая функция, равная

$$k_{\text{опт}}(t) = \frac{1}{\pi 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{\Phi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega,$$

есть четная положительно определенная функция, т. е. она относится к классу корреляционных функций стационарных случайных процессов. Оптимальные интерполи-

рующие фильтры с такой импульсной переходной характеристикой являются, очевидно, физически неосуществимыми и для точного восстановления процесса требуется бесконечная задержка его во времени так же, как и при восстановлении процесса в соответствии с теоремой Котельникова.

Известно [85], что $G(\omega) \leq \Delta t \Phi(\omega)$, причем знак равенства имеет место только в том случае, когда спектр $G(\omega)$ строго ограничен некоторой частотой ω_c , а шаг дискретизации процесса удовлетворяет условиям теоремы Котельникова: $\Delta t \leq \pi/\omega_c$. Отсюда, используя (1.46), приходим к выводу, что в общем случае не существует такого интерполирующего фильтра, который обеспечивает безошибочное восстановление стационарного случайного сигнала в принятой схеме восстановления и лишь сигналы с ограниченным частотой ω_c спектром, у которых [85]

$$\frac{G(\omega)}{\Delta t \Phi(\omega)} = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c, \end{cases}$$

могут быть безошибочно восстановлены с помощью интерполирующего фильтра с частотной характеристикой

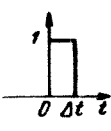
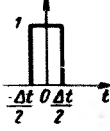
$$K_{\text{опт}}(j\omega) = \begin{cases} \Delta t, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c, \end{cases}$$

т. е. с помощью идеального фильтра нижних частот в соответствии с теоремой Котельникова.

Реальные сигналы не могут иметь строго ограниченного спектра [82], поэтому восстановление их по дискретным данным всегда будет сопровождаться некоторой ненулевой погрешностью.

3. Частные случаи

В табл. 1.1 приведены основные характеристики интерполирующих фильтров, соответствующие наиболее распространенным видам интерполяции: ступенчатой симметричной и несимметричной, линейной интерполяции (см. рис. 1.5) и интерполяции по Котельникову. Подставляя эти характеристики в формулы (1.40)—(1.44) при известных корреляционной функции $R(\tau)$ и энергетических спектрах $G(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ исходного и соответствующего

		Тип интерполирующего		
		Элемент нулевого порядка (несимметричный)	Элемент нулевого порядка (симметричный)	
		1	2	
Характеристика интерполирующего фильтра	Импульсная переходная характеристика $k_0(t)$	аналитическое выражение	$1, 0 \leq t \leq \Delta t,$ $0, t < 0, t > \Delta t$	$1, t \leq \frac{\Delta t}{2},$ $0, t > \frac{\Delta t}{2}$
	частотная характеристика $K_0(j\omega)$	график		
$g_0(t) = k_0(t) * k_0(-t)$			$\Delta t \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}} e^{j\omega \Delta t / 2}$	$\Delta t \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}}$
			$\Delta t - t , t \leq \Delta t,$ $0, t > \Delta t$	$\Delta t - t , t \leq \Delta t,$ $0, t > \Delta t$
Относительная средне-квадратическая ошибка восстановления Δ_0^2			$2 \left(1 - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} r(\tau) d\tau \right)$	$2 \left(1 - \frac{2}{\Delta t} \int_0^{\Delta t/2} r(\tau) d\tau \right)$

фильтра

Элемент первого порядка

Идеальный фильтр нижних частот

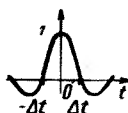
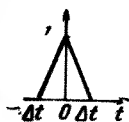
3

4

$$1 - \frac{|t|}{\Delta t}, \quad |t| \leq \Delta t$$

$$0, \quad |t| > \Delta t$$

$$\frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$$



$$\Delta t \frac{\sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2}}{\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)^2}$$

$$\Delta t, \quad |\omega| \leq \omega_c$$

$$0, \quad |\omega| > \omega_c$$

$$\frac{2}{3} \Delta t - \frac{t^2}{\Delta t} + \frac{|t|^3}{2\Delta t^2}, \quad |t| \leq \Delta t;$$

$$\frac{4}{3} \Delta t - 2|t| + \frac{t^2}{\Delta t} - \frac{|t|^3}{6\Delta t^2},$$

$$\Delta t \leq |t| \leq 2\Delta t; \quad 0, \quad |t| > 2\Delta t$$

$$\Delta t \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{3} r(\Delta t) -$$

$$- \frac{4}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} r(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$2 \left(1 - \frac{2}{\Delta t} \int_0^{\infty} r(\tau) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin \omega_c \tau}{\omega_c \tau} d\tau \right) =$$

$$= 2 \frac{\int_0^{\infty} G(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} G(\omega) d\omega} = 2 \frac{\sigma_c^2}{\sigma^2}$$

щего ему дискретного случайного процесса, легко можно найти корреляционно-спектральные характеристики и среднеквадратические значения ошибок при различных методах интерполяции. Заметим при этом, что энергетический спектр $\Phi(\omega)$ дискретного случайного процесса, порождаемого непрерывным случайным процессом с рациональным спектром, всегда может быть выражен в замкнутом виде в элементарных функциях [85]. В ряде случаев его можно найти по таблицам двухсторонних дискретных преобразований Лапласа [85, стр. 423].

В рассматриваемых случаях относительная среднеквадратическая ошибка интерполяции Δ_0^2 , выраженная через временные и частотные характеристики, имеет вид, показанный в табл. 1.1. Интересно отметить, что при интерполяции по Котельникову

$$\Delta_0^2 = 2\sigma_c^2/\sigma^2, \text{ где } \sigma_c^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} G_s(\omega) d\omega \text{ — дисперсия тех состав-}$$

ляющих в спектре исходного процесса, частоты которых расположены выше частоты дискретизации. Таким образом, дисперсия ошибки восстановления стационарного случайного сигнала по дискретным данным при интерполяции по Котельникову ровно вдвое больше дисперсии высокочастотных (выше частоты дискретизации) составляющих в спектре сигнала.

На рис. 1.7 показаны энергетические спектры ошибок восстановления экспоненциально-коррелированного случайного сигнала, заданного дискретными значениями с шагом $\Delta t = \pi/2\omega_*$, у которого

$$R(\tau) = e^{-\omega_* |\tau|}, \quad G(\omega) = \frac{2\omega_*}{\omega_*^2 + \omega^2},$$

$$\Phi(\omega) = \frac{\text{sh } \omega_* \Delta t}{\text{ch } \omega_* \Delta t - \cos \omega \Delta t}. \quad (1.47)$$

Кривые вычислены по формуле (1.41) с использованием табл. 1.1 и их номера совпадают с номерами интерполирующих фильтров в этой таблице. Нулевым номером обозначен спектр ошибки восстановления при оптимальной частотной характеристике интерполирующего фильтра (1.45). Тонкой линией показан нормированный спектр исходного случайного процесса $G(\omega)/G(0)$. Рядом с номерами даны соответствующие значения относительной

среднеквадратической ошибки восстановления, аналитические выражения для которой при произвольном шаге дискретизации имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}
 0. \quad \Delta_0^2 &= 1 - \frac{\operatorname{ch} \varepsilon - (1 + \varepsilon) e^{-\varepsilon}}{\varepsilon \operatorname{sh} \varepsilon} \approx \frac{\varepsilon}{3}; \\
 1. \quad \Delta_0^2 &= 2 \left(1 - \frac{1 - e^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \approx \varepsilon; \\
 2. \quad \Delta_0^2 &= 2 \left(1 - 2 \frac{1 - e^{-\varepsilon/2}}{\varepsilon} \right) \approx \frac{\varepsilon}{2}; \\
 3. \quad \Delta_0^2 &= \frac{5 + e^{-\varepsilon}}{3} + 4 \frac{1 - \varepsilon - e^{-\varepsilon}}{\varepsilon^2} \approx \frac{\varepsilon}{3}; \\
 4. \quad \Delta_0^2 &= 2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \pi/\varepsilon \right) \approx \frac{4}{\pi^2} \varepsilon = 0,4\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

где $\varepsilon = \omega_c \Delta t$ — нормированный шаг дискретизации, равный отношению шага дискретизации Δt к величине интервала корреляции процесса на уровне $1/e$.

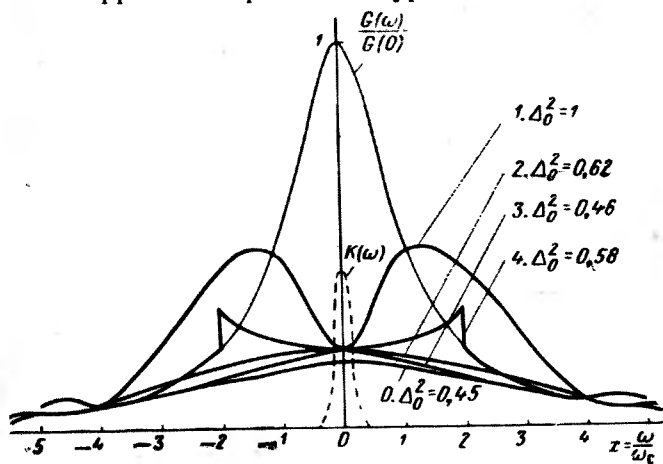


Рис. 1.7.

В (1.48) справа даны асимптотические значения ошибки интерполяции при малых ε . Асимптотическими формулами практически можно пользоваться вместо точных формул при $\varepsilon \leq 1$. Из рис. 1.7 видно, что в рассматриваемом примере линейная интерполяция по величине ошибки восстановления весьма мало отличается от опти-

мальной интерполяции. В пределе при $\Delta \rightarrow 0$ согласно (1.47) линейная интерполяция является в данном случае оптимальной.

Наибольшая погрешность восстановления имеет место при использовании ступенчатой несимметричной интерполяции. Интерполяция по Котельникову в отношении точности занимает здесь промежуточное положение между ступенчатой симметричной и линейной интерполяцией. Вообще же в этом примере значения ошибок довольно большие и слабо зависят от вида интерполяции. Это объясняется тем, что, во-первых, выбранный для примера процесс имеет интенсивные высокочастотные составляющие (спектральная плотность его в области высоких частот убывает всего лишь как $1/\omega^2$), во-вторых, шаг дискретизации выбран слишком большим (коэффициент корреляции между соседними дискретами процесса равен $e^{-\pi/2} \approx 0,2$).

В заключение можно сделать вывод, что полученные здесь формулы оценки погрешности интерполяции позволяют в каждом конкретном случае достаточно просто найти ошибку восстановления стационарных случайных сигналов по дискретным данным при различных видах интерполяции. Полученные результаты будут использованы в § 3.7.

2.1. Постановка задачи

Рассмотренные в первой главе методы моделирования случайных векторов в рамках многомерных распределений и рамках корреляционной теории, вообще говоря, пригодны для моделирования случайных процессов, заданных на конечном интервале времени. Однако при формировании реализаций большой длины эти методы, как было отмечено, требуют большого количества вычислений и трудоемкой подготовительной работы, что затрудняет их практическое использование.

К сожалению, более простых методов получения неограниченных во времени дискретных реализаций случайных процессов с заданным многомерным законом распределения или же с заданной корреляционной функцией $R(t, t')$ до настоящего времени не известно. Однако на практике столь широко поставленные задачи моделирования случайных процессов встречаются редко. Чаще требуется моделировать случайные процессы, относящиеся к определенному, более узкому классу случайных процессов, например: стационарные нормальные случайные процессы; стационарные процессы, не являющиеся нормальными, но порождаемые нормальными в нелинейных системах; нестационарные нормальные случайные процессы со стационарными приращениями; многомерные стационарные нормальные случайные процессы (т. е. несколько стационарных и стационарно связанных случайных процессов); марковские процессы; случайные потоки и др. Для этих классов случайных процессов можно указать достаточно эффективные моделирующие алгоритмы.

В настоящей главе рассматриваются вопросы моделирования названных классов случайных процессов. Кроме этого, рассматриваются принципы моделирования случайных полей, т. е. случайных функций нескольких переменных. Основное внимание уделено методам моде-

лирования стационарных нормальных случайных процессов, так как эти процессы, с одной стороны, имеют наибольшее распространение в качестве математических моделей различного рода флуктуаций в радиотехнике, а с другой стороны, имея эффективные алгоритмы для моделирования стационарных нормальных случайных процессов, можно сравнительно просто получить алгоритмы для моделирования других классов случайных процессов, именно тех случайных процессов, которые можно рассматривать как порождаемые стационарными нормальными процессами при различных линейных и нелинейных преобразованиях.

Для стационарных нормальных случайных процессов в последнее время найдены весьма экономичные моделирующие алгоритмы. В основу этих алгоритмов положено линейное преобразование стационарной последовательности $x[n]$ независимых нормальных случайных чисел (дискретный белый шум) в последовательность $\xi[n]$, коррелированную по заданному закону. При этом оператор линейного преобразования записывается либо в виде *скользящего суммирования* с некоторым весом $c_k = c[k]$

$$\xi[n] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x[n-k], \quad (2.1)$$

либо как *рекуррентное уравнение* вида

$$\begin{aligned} \xi[n] &= a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_l x[n-l] - \\ &- b_1 \xi[n-1] - b_2 \xi[n-2] - \dots - b_m \xi[n-m] = \\ &= \sum_{k=0}^l a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^m b_k \xi[n-k]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вид корреляционной функции случайного процесса, моделируемого с помощью алгоритмов (2.1) и (2.2), определяется набором значений параметров a_k , b_k и c_k и их количеством, которое обычно невелико. Алгоритмы (2.1) и (2.2) отличаются простотой и позволяют формировать дискретные реализации случайных процессов *сколь угодно большой длины*.

Начальные условия в рекуррентном уравнении (2.2), т. е. предыдущие значения последовательности $\xi[n]$ при

вычисления первого значения этой последовательности можно выбирать нулевыми. При этом будет иметь место некоторый переходный процесс, в результате которого начальный участок моделируемого процесса будет искаженным. Однако после окончания переходного процесса последовательность $\xi[n]$ становится стационарной. В § 2.6 будет показано, каким образом нужно выбрать начальные условия, чтобы избавиться от переходного процесса.

Параметры a_k , b_k рекуррентных алгоритмов и дискретная весовая функция c_k в формуле скользящего суммирования определяются на этапе предварительной подготовки к моделированию. Различие между предложенными методами моделирования состоит в путях перехода от заданных корреляционно-спектральных характеристик к параметрам алгоритмов, т. е. в подготовительной работе.

Уравнения (2.1) и (2.2) описывают поведение некоторого дискретного (импульсного) линейного фильтра [85], который из дискретного белого шума, подаваемого на его вход, формирует на выходе дискретный случайный процесс с заданными корреляционно-спектральными характеристиками. Передаточные функции этих фильтров в смысле дискретного преобразования Лапласа имеют соответственно вид

$$K_*(z) = c_1 z + \dots + c_N z^N, \quad (2.3)$$

$$K_*(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_l z^l}{1 + b_1 z + \dots + b_m z^m} = \frac{\sum_{k=0}^l a_k z^k}{1 + \sum_{k=1}^m b_k z^k}. \quad (2.4)$$

Функция $K_*(z)$ определяется как отношение дискретного преобразования Лапласа (иначе z -преобразования или D -преобразования [85]) выходного сигнала к дискретному преобразованию Лапласа входного сигнала. Если входной и выходной сигналы обозначить соответственно через $x_1[n]$ и $x_2[n]$, то

$$K_*(z) = K(e^{-q}) = \frac{D\{x_2[n]\}}{D\{x_1[n]\}},$$

где

$$D\{x_1[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_1[n] e^{-qn} = \sum_{n=0}^{\infty} x_1[n] z^n; \quad (2.5)$$

$$D\{x_2[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_2[n] e^{-qn} = \sum_{n=0}^{\infty} x_2[n] z^n; \quad (2.6)$$

q — комплексное число, реальная часть которого выбирается из условия сходимости рядов (2.5) и (2.6).

Аргумент z передаточной функции является комплексной переменной, модуль которой равен единице. Символ z^k можно рассматривать как изображение оператора, который осуществляет задержку входного сигнала на k периодов, так как смещение функции $x[n]$ на k периодов соответствует умножению ее изображения на z^k , т. е.

$$D\{x[n - k]\} = z^k D\{x[n]\}.$$

Дискретное преобразование Лапласа обладает свойствами, во многом аналогичными свойствам обычного преобразования Лапласа [85]. Кроме отмеченных выше, в дальнейшем нам потребуется еще знать свойство линейности (изображение суммы дискретных функций равно сумме изображений слагаемых и умножение функции на постоянный множитель соответствует умножению

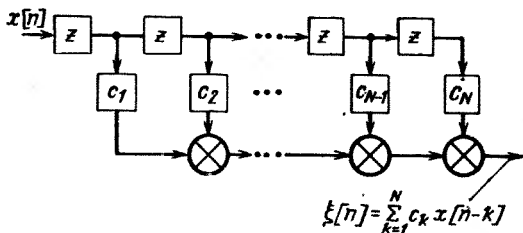


Рис. 2.1.

ее изображения на этот же множитель), а также то, что дискретная передаточная функция системы последовательно (параллельно) соединенных дискретных линейных фильтров равна произведению (сумме) дискретных передаточных функций отдельных фильтров. Используя эти свойства z -преобразования (в том числе и отмеченные

ранее), легко можно изобразить структурные схемы дискретных фильтров, описываемых уравнениями (2.1) и (2.2) и имеющих передаточные функции (2.3) и (2.4) соответственно (рис. 2.1 и 2.2). На этих рисунках элемент вычитания в отличие от элементов суммирования зачернен.

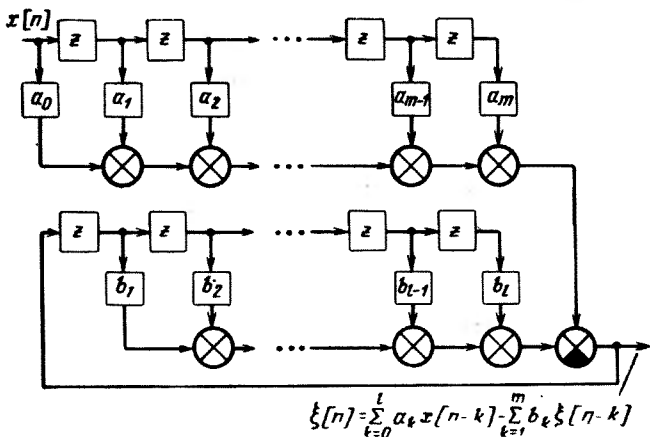


Рис. 2.2.

Как следует из рис. 2.2, рекуррентное уравнение (2.2) описывает процессы в замкнутой линейной дискретной системе, в отличие от формулы скользящего суммирования (2.1), описывающей поведение разомкнутой дискретной линейной системы.

Процесс перехода от передаточных функций вида (2.3) и (2.4) к уравнениям (2.1) и (2.2) соответственно, описывающим процесс дискретной фильтрации во времени, очевиден; он называется *идентификацией* дискретных передаточных функций [35].

Задачу цифрового моделирования случайных процессов с помощью скользящего суммирования и рекуррентных разностных уравнений можно рассматривать как задачу *синтеза* линейного дискретного *формирующего* фильтра, который преобразует дискретный белый шум в коррелированный дискретный случайный процесс с заданными корреляционно-спектральными характеристика-

ми. В случае моделирования многомерных процессов ставится задача синтеза соответствующих многомерных формирующих фильтров.

Ниже рассматриваются различные методы решения этих задач применительно к моделированию стационарных (в том числе и многомерных) и нестационарных нормальных случайных процессов. Для моделирования ненормальных случайных процессов предлагаются нелинейные дискретные формирующие фильтры. В основном рассматриваются дискретные случайные процессы, порожденные непрерывными. При синтезе дискретных формирующих фильтров широко используются свойства исходных непрерывных процессов и систем.

2.2. Моделирование стационарных случайных процессов методом скользящего суммирования

Пусть задана последовательность $x[n]$ независимых случайных чисел с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (ортонормированная последовательность случайных величин или нормированный дискретный белый шум). Корреляционная функция последовательности $x[n]$ имеет вид

$$R[n] = M\{x[k] x[k+n]\} = \delta_n = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Сформируем из последовательности $x[n]$ согласно алгоритму (2.1) новую последовательность $\xi[n]$:

$$\xi[n] = c_1 x[n-1] + \dots + c_N x[n-N],$$

$$\xi[n+1] = c_1 x[n] + \dots + c_N x[n+1-N], \quad (2.8)$$

.....

Случайная величина $\xi[n]$ получается путем суммирования (с весами c_1, c_N) N независимых случайных чисел, представляющих собой отрезок последовательности $x[n]$. При этом для вычисления очередного значения $\xi[n+1]$ исходная последовательность $x[n]$ сдвигается на один элемент вправо, так что значение $x[n-N]$ выбрасывается. Зависимость (коррелированность) между слу-

случайными величинами $\xi[n]$ и $\xi[n+k]$ обеспечивается за счет того, что в образовании их участвует k общих случайных величин последовательности $x[n]$. При $k=N$ значения $\xi[n]$ и $\xi[n+k]$ становятся некоррелированными. Характер корреляционных связей процесса $\xi[n]$ определяется, очевидно, лишь выбором значений коэффициентов c_n и не зависит от закона распределения исходных случайных чисел $x[n]$. Если исходные случайные числа распределены нормально, то в силу линейности преобразования последовательность $\xi[n]$ будет нормальным случайным процессом.

Случайная последовательность коррелированных чисел $\xi[n]$ имитирует в точках $t_n = n\Delta t$ значения некоторого стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R(\tau)$, которая в точках $\tau_n = n\Delta t$ определяется, как легко видеть, соотношениями:

$$\begin{aligned} R[0] &= c_1^2 + \dots + c_N^2, \\ R[1] &= c_1 c_2 + \dots + c_{N-1} c_N, \\ &\dots \dots \dots \\ R[N-1] &= c_1 c_N, \\ R[N] &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $R[n] = R(n\Delta t)$.

Действительно, накладывая условие (2.7) на систему (2.8), получим (2.9).

Вычисление корреляционной функции $R[n]$ по формулам (2.9) является, по существу, операцией свертки дискретной функции $c_n = c[n]$ с дискретной функцией $c_{-}[n] = c[-n]$, т. е.

$$\begin{aligned} R[n] &= c[n] * c_{-}[n] = \\ &= \begin{cases} \sum_{k=n+1}^N c[k] c_{-}[n-k], & n = \overline{0, N-1}, \\ \sum_{k=1}^{N-n} c[k] c_{-}[n-k], & n = \overline{0, (N-1)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Вычисление корреляционной функции $R[n]$ по формулам (2.9) можно свести также к перемножению матриц

$$\begin{pmatrix} R[0] \\ R[1] \\ \vdots \\ R[N-2] \\ R[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{N-1} & c_N \\ c_2 & c_3 & \dots & c_N & 0 \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ c_{N-1} & c_N & \dots & 0 & 0 \\ c_N & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Таким образом, методом скользящего суммирования по алгоритму (2.1) можно формировать дискретные реализации стационарных нормальных случайных процессов с ограниченной во времени корреляционной функцией, определяемой выбором весовых множителей c_k .

Если коэффициенты c_k заданы, то корреляционную функцию случайного процесса, формируемого методом скользящего суммирования, легко можно найти из соотношений (2.9) — (2.11). Но это лишь задача анализа. Для моделирования случайных процессов методом скользящего суммирования требуется решать задачу синтеза: по заданной корреляционной функции $R[n]$ найти нужные коэффициенты (весовую функцию дискретного фильтра), — которая, как и многие другие задачи синтеза, значительно сложнее задачи анализа. Рассмотрим возможные пути ее решения.

1. Получение весовых коэффициентов путем решения нелинейной алгебраической системы уравнений

Наиболее простым по своей идее способом синтеза дискретного фильтра с заданными свойствами является получение коэффициентов c_k из решения нелинейной алгебраической системы уравнений (2.9). В работе [69] приведены три метода получения приближенного решения этой системы на ЦВМ. Однако получение весовых множителей таким путем требует довольно значительной вычислительной работы. Если в задачах, использующих модель случайного процесса, требуется изменить шаг дискретизации, то это связано либо с повторным решением указанной системы для соответствующего шага, либо с применением интерполяции моделируемого процесса по дискретным точкам, найденным с прежним шагом.

После того как подготовительная работа закончена, процесс формирования реализаций случайного процесса методом скользяще-

го суммирования (2.1) осуществляется весьма просто. Для запоминания коэффициентов c_k и текущих значений последовательности $x[n]$ требуется $2N$ ячеек памяти. Обычно число N невелико, например 5—10.

2. Получение весовых коэффициентов путем разложения функции спектральной плотности в ряд Фурье

В [12] предложен новый подход к отысканию весовых коэффициентов c_k , позволяющий свести подготовительную работу к вычислению значений c_k по формуле, а именно весовые коэффициенты находятся как коэффициенты Фурье в разложении в ряд по косинусам функции спектральной плотности $G(\omega)$ моделируемого процесса, возведенной в степень $1/2$, т. е.

$$c_k = \frac{1}{\omega_c} \int_0^{\omega_c} \left[\frac{\omega_c}{\pi} G(\omega) \right]^{1/2} \cos \frac{k\pi\omega}{\omega_c} d\omega, \quad \omega_c = \frac{\pi}{\Delta t}. \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) можно получить, исходя из следующих соображений. Пусть для моделирования задан непрерывный стационарный центрированный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с энергетическим спектром

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Обычно спектральная плотность $G(\omega)$ при достаточно больших ω убывает и, начиная с некоторой частоты ω_c , становится пренебрежимо малой. Тогда случайный процесс $\xi(t)$ с достаточной точностью можно заменить (погрешность замены будет оценена ниже) процессом $\xi_0(t)$ с энергетическим спектром

$$G_0(\omega) = \begin{cases} G(\omega) & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$

Будем рассматривать случайный процесс $\xi_0(t)$ как результат воздействия непрерывного нормального белого шума $x(t)$ с ограниченной частотой ω_c спек-

тром на непрерывную линейную систему, передаточная функция которой определяется соотношением

$$G_0 |K(j\omega)|^2 = G_0(\omega), \quad (2.13)$$

где G_0 — спектральная плотность белого шума (рис. 2.3). Соотношение (2.13) выражает известный из теории случайных процессов факт: энергетический спектр шума на

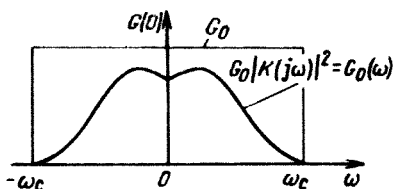


Рис. 2.3.

выходе линейной системы равен произведению энергетического спектра входного шума на квадрат модуля передаточной функции (комплексной частотной характеристики) системы.

Условию (2.13) удовлетворяет бесконечное множество линейных систем, которые отличаются друг от друга фазо-частотными характеристиками, являющимися аргументами комплексной функции $K(j\omega)$. Выберем одну из этих систему (систему K_0) с фазо-частотной характеристикой, равной нулю. Передаточная функция такой системы вещественная. Чтобы удовлетворять условию (2.13), она должна иметь вид

$$K_0(j\omega) = \left[\frac{1}{G_0} G_0(\omega) \right]^{1/2}. \quad (2.14)$$

Импульсная переходная характеристика, соответствующая передаточной функции (2.14), равна

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \left[\frac{1}{G_0} G_0(\omega) \right]^{1/2} \cos \omega t d\omega. \quad (2.15)$$

Последнее равенство в формуле (2.15) написано в силу четности функции $K_0(j\omega)$. Заметим, что система K_0 физически не осуществима, так как ее импульсная переходная характеристика, определяемая формулой (2.15), отлична от нуля не только при положительных, но и при отрицательных значениях t , причем $h(t) = h(-t)$. Однако в данном случае это обстоятельство не является ограничением.

Покажем, что дискретные значения $\xi_0[n]$ процесса $\xi_0(t)$ на выходе системы K_0 в точках $t_n = n\Delta t = n \frac{\pi}{\omega_c}$ можно точно выразить через дискретные значения входного процесса и дискретные значения импульсной переходной характеристики системы.

Запишем случайный процесс $x(t)$ на входе системы K_0 в виде ряда Котельникова:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] f_n(t), \quad (2.16)$$

где

$$f_n(t) = \frac{\sin[\omega_c(t - n\Delta t)]}{\omega_c(t - n\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega_c};$$

$x[n] = x(n\Delta t)$ — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с параметрами $(0, \sigma^2)$;

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} G_0 d\omega = G_0 \frac{\omega_c}{\pi} — \text{дисперсия шума } x(t).$$

Соотношение (2.16) выражает непрерывный белый шум $x(t)$ с ограниченным частотой ω_c спектром через дискретный белый шум $x[n]$, значения которого совпадают со значениями $x(n\Delta t)$. В дальнейшем будем предполагать, что последовательность $x[n]$ ортонормирована ($\sigma^2 = 1$), тогда $G_0 = \frac{\pi}{\omega_c} = \Delta t$.

Выразим реакцию системы K_0 на воздействие $x(t)$ в виде интеграла Дюамеля:

$$\xi_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (2.17)$$

Отсюда

$$\xi_0[n] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(n\Delta t - \tau) d\tau.$$

Для нахождения последовательности $\xi_0[n]$ функцию $h(t)$, которая в силу (2.15) имеет ограниченный спектр, запишем в виде ряда Котельникова:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] f_n(t), \quad (2.18)$$

где

$$h[n] = h(n\Delta t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} K_0(j\omega) \cos \frac{n\pi\omega}{\omega_c} d\omega.$$

Подставив в (2.17) ряды (2.16) и (2.18), получим

$$\xi_0[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[k] x[m] \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\tau) f_m(n\Delta t - \tau) d\tau.$$

Поскольку $f_m(n\Delta t - \tau) = f_{n-m}(\tau)$, то на основании соотношения ортогональности функций $f_n(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) f_{n-m}(t) dt = \frac{\pi}{\omega_c} \delta_{k, n-m},$$

где

$$\delta_{k, n-m} = \begin{cases} 1, & k = n - m, \\ 0, & k \neq n - m, \end{cases}$$

окончательно будем иметь

$$\xi_0[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_0[k] x[n-k]. \quad (2.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_0[k] &= \frac{\pi}{\omega_c} h[k] = \frac{1}{\omega_c} \int_0^{\omega_c} K_0(j\omega) \cos \frac{k\pi\omega}{\omega_c} d\omega = \\ &= \frac{1}{\omega_c} \int_0^{\omega_c} \left[\frac{\omega_c}{\pi} G(\omega) \right]^{1/2} \cos \frac{k\pi\omega}{\omega_c} d\omega = \int_0^1 s_0(x) \cos k\pi x dx, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$s_0(x) = K_0(j\omega_c x) = \left[\frac{\omega_c}{\pi} G(\omega_c x) \right]^{1/2};$$

$x = \frac{\omega}{\omega_c}$ — безразмерная частота.

Отметим, что формула (2.19) совпадает с известной формулой прямоугольников для приближенного вычисления интеграла, если шаг дискретизации подынтегральной функции $h(\tau)x(t-\tau)$ выбрать равным Δt . Приведенный выше вывод показывает, что формула прямоуголь-

ников с шагом $\Delta t = \pi/\omega_c$ в применении к интегралу (2.17) дает точный результат, если функции $h(t)$ и $x(t)$ имеют спектры, ограниченные частотой $\omega_c = \pi/\Delta t$.

Коэффициенты $c_0[k]$, как это следует из формулы (2.20), совпадают с коэффициентами Фурье в разложении функции $K_0(j\omega)$ на интервале $(-\omega_c, \omega_c)$. Следовательно, $c_0[k] \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Как правило, коэффициенты $c_0[k]$ достаточно быстро убывают. Так, например, если функция $K_0(j\omega)$ непрерывна, то для $c_0[k]$ имеется оценка [76]:

$$c_0[k] \leq Q/k^2,$$

где Q — некоторое положительное число.

Поэтому обычно достаточно ограничиться в (2.19) небольшим количеством членов и тогда можно записать

$$\xi_0[n] \approx \xi_*[n] = \sum_{k=-p}^p c_0[k] x[n-k]. \quad (2.21)$$

Поскольку исходная последовательность $x[n]$ стационарна, то статистические свойства последовательности $\xi_*[n]$ не изменятся, если алгоритм (2.21) записать в виде, аналогичном (2.1), т. е.

$$\xi_*[n] = \sum_{k=1}^N c_k x[n-k], \quad (2.22)$$

где $N = 2p + 1$, $c_k = c_0[k-p-1]$.

Практически параметр p , ограничивающий число весовых коэффициентов $c_0[k]$, можно выбрать из условия

$$\left| 1 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{-p}^p c_0^2[k] \right| < \epsilon, \quad (2.23)$$

где σ^2 — дисперсия моделируемого случайного процесса; ϵ — некоторое малое число (погрешность).

Неравенство (2.23) основано на том, что сумма квадратов весовых коэффициентов $c_0[k]$ должна быть равна дисперсии моделируемого случайного процесса [см. (2.9)].

В рассматриваемом методе моделирования подготовительная работа состоит в вычислении интеграла (2.20) по известной функции спектральной плотности моделируемого процесса. Подготовительная работа может быть проделана без применения ЦВМ, если интеграл в (2.20) берется в явном виде. Если же интеграл (2.20) не явля-

ется табличным и не выражается в элементарных или ранее табулированных специальных функциях, то при нахождении коэффициентов $c_0[k]$ может оказаться целесообразным аппроксимировать $K_0(j\omega)$ некоторой функцией, разложение которой в ряд Фурье заранее известно.

Обычно, когда частота ω_c выбрана достаточно большой, верхний предел в интеграле (2.20) можно положить равным бесконечности, что часто облегчает вычисление этого интеграла, хотя и вносит некоторую погрешность. В случаях, когда спектральная плотность задана графически или таблицей, коэффициенты $c_0[k]$ могут быть найдены известными методами приближенного гармонического анализа.

Заметим, что поскольку дискретная весовая функция $c_0[k]$ является четной ($c_0[k] = c_0[-k]$), то при моделировании случайного процесса можно хранить в памяти машины не все значения $c_0[k]$, а лишь значения ее при $k \geq 0$.

Корреляционная функция последовательности $\xi_*[n]$, получаемой с помощью алгоритмов (2.21) или (2.22), будет несколько отличаться от заданной корреляционной функции, так как эти алгоритмы являются, вообще говоря, приближенными.

Представляет интерес оценка погрешности данного метода моделирования.

Предположим, что моделируемый непрерывный процесс $\xi(t)$ восстанавливается по его приближенным дискретным значениям $\xi_*[n]$, получаемым по данному алгоритму, с помощью ряда Котельникова. В результате такой интерполяции образуется непрерывный случайный процесс $\xi_*(t)$, энергетический спектр и корреляционную функцию которого обозначим соответственно как $G_*(\omega)$ и $R_*(\tau)$. Примем в качестве оценки погрешности метода относительное среднеквадратическое отклонение спектральной функции $G_*(\omega)$ от заданной спектральной функции $G(\omega)$.

Случайный процесс $\xi_*(t)$ можно рассматривать как результат воздействия исходного белого шума $x(t)$ на линейную систему K_0 с импульсной переходной характеристикой

$$h_*(t) = \sum_{-p}^p h[n] f_n(t),$$

отличающейся от импульсной переходной характеристики $h(t)$ конечным числом слагаемых в разложении (2.18). Передаточная функция системы K_0 в полосе частот $(-\omega_v, \omega_v)$ имеет вид

$$K_{0*}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_*(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{-p}^p \frac{\pi}{\omega_c} h[k] e^{j \frac{k\pi\omega}{\omega_c}} =$$

$$= \sum_{-p}^p c_0[k] e^{j \frac{k\pi\omega}{\omega_c}}.$$

Вне полосы $(-\omega_c, \omega_c)$ $K_{0*}(j\omega) = 0$, кроме того, в силу четности коэффициентов $c_0[k]$ функция $K_{0*}(j\omega)$ является вещественной. Энергетический спектр процесса $\xi_*(t)$ на выходе системы K_{0*} равен произведению входного спектра на квадрат модуля передаточной функции системы, т. е.

$$G_*(\omega) = G_0 |K_{0*}(j\omega)|^2 = \frac{\pi}{\omega_c} \left[\sum_{-p}^p c_0[k] e^{j \frac{k\pi\omega}{\omega_c}} \right]^2 =$$

$$= \frac{\pi}{\omega_c} \sum_{-2p}^{2p} c_*[k] e^{j \frac{k\pi\omega}{\omega_c}}, \quad |\omega| \leq \omega_c, \quad (2.24)$$

где $c_*[k] = c_0[k] * c_0[k]$ — свертка коэффициентов $c_0[k]$, $k = \overline{-p, p}$, т. е.

$$c_*[k] = \sum_{i=-p+k}^p c_0[i] c_0[i-k], \quad k = \overline{0, 2p}, \quad (2.25)$$

$$c_*[k] = \sum_{i=-p}^{p-k} c_0[i] c_0[i-k], \quad k = \overline{0, -2p}.$$

Операция свертки коэффициентов $c_0[k]$ образуется при возведении в квадрат ряда Фурье (2.24).

Величина относительного среднеквадратического отклонения функции $G_*(\omega)$ от функции $G(\omega)$ по определению равна

$$\Delta^2 = \frac{\int_0^{\infty} [G(\omega) - G_*(\omega)]^2 d\omega}{\int_0^{\infty} G^2(\omega) d\omega} = \frac{\int_0^{\infty} [s^2(x) - s_{0*}^2(x)]^2 dx}{\int_0^{\infty} s^4(x) dx}, \quad (2.26)$$

где

$$s^2(x) = \frac{\omega_c}{\pi} G(\omega_c x), \quad s_{0*}(x) = K_{0*}(j\omega_c x).$$

Если представляют интерес корреляционные связи процесса, то можно оценить ошибку и с точки зрения отклонения функции корреляции $R_*(\tau)$ от заданной функции корреляции $R(\tau)$. Действительно, согласно известному равенству Парсеваля имеем

$$\Delta^2 = \frac{\int_0^{\infty} [R(\tau) - R_*(\tau)]^2 d\tau}{\int_0^{\infty} R^2(\tau) d\tau}.$$

Выражение (2.26) легко преобразуется к виду

$$\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2,$$

где

$$\Delta_1^2 = \frac{\int_1^{\infty} s^4(x) dx}{\int_0^{\infty} s^4(x) dx} = \frac{1}{s^4} \int_1^{\infty} s^4(x) dx$$

— погрешность, обусловленная заменой бесконечного спектра ограниченным;

$$\Delta_2^2 = \frac{1}{s^4} \int_0^1 [s_0^2(x) - s_{0*}^2(x)]^2 dx$$

— погрешность, обусловленная заменой бесконечного ряда $c_0[k]$ конечным рядом $c_0[k]$, $k = -p, p$.

При $\omega_c \rightarrow \infty$ $\Delta_1^2 \rightarrow 0$, при $p \rightarrow \infty$ $\Delta_2^2 \rightarrow 0$, так как $s_{0*}(x) \rightarrow s_0(x)$.

Следовательно, при увеличении значений ω_c и p суммарная погрешность Δ^2 может быть сделана сколь угодно малой. Следует заметить, что погрешность Δ^2 строго равна нулю в случаях, когда спектр моделируемого процесса ограничен частотой ω_c , а разложение (2.18) содержит лишь конечное число членов, равное p . Однако это специальные случаи, и обычно погрешность Δ^2 не равна в точности нулю.

Для вычисления погрешности Δ^2 разложим функцию $\Delta s^2(x) = s_0^2(x) - s_{0*}^2(x)$ в ряд Фурье на интервале $(-1, 1)$ с коэффициентами разложения

$$\Delta c[k] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Delta s^2(x) e^{-jk\pi x} dx.$$

В силу чётности функции $\Delta s^2(x)$ коэффициенты $\Delta c[k]$ будут вещественными и равными

$$\Delta c[k] = \int_0^1 \Delta s^2(x) \cos k\pi x dx = \int_0^1 s_0^2(x) \cos k\pi x dx - \int_0^1 s_{0*}^2(x) \cos k\pi x dx = c'_*[k] - c_*[k],$$

где $c'_*[k]$ — коэффициенты Фурье в разложении функции $s_0^2(x)$ на интервале $(-1,1)$, а $c_*[k]$ — уже используемые ранее коэффициенты [формула (2.24)].

Согласно равенству Парсеваля среднее значение квадрата функции по некоторому промежутку равно сумме квадратов модулей коэффициентов разложения функции в ряд Фурье на этом промежутке, тогда можно записать

$$\Delta_2^2 = \frac{1}{s^4} \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta c^2[k] = \frac{1}{s^4} \sum_{-\infty}^{\infty} (c'_*[k] - c_*[k])^2.$$

Учитывая, что $c_*[k] \equiv 0$ при $|k| > 2p$, окончательно получим

$$\Delta_2^2 = \frac{1}{s^4} \left[\sum_{-2p}^{2p} (c'_*[k] - c_*[k])^2 + 2 \sum_{k=2p+1}^{\infty} (c'_*[k])^2 \right]. \quad (2.27)$$

Нетрудно найти абсолютную величину отклонения функции корреляции $R_*[n] = R_*(n\Delta t)$, получаемой при данном методе моделирования, от заданной функции корреляции $R[n] = R(n\Delta t)$. В самом деле, значения корреляционной функции $R_*[n]$ совпадают со значениями коэффициентов $c_*[n]$, что следует из сравнения свертки $c_0[n] * c_0[n]$ [формула (2.25)] с (2.10). Поэтому

$$\Delta R[n] = R[n] - R_*[n] = R[n] - c_*[n]. \quad (2.28)$$

Вычисление свертки $c_0[n] * c_0[n]$ сводится к перемножению матриц, аналогичных матрицам (2.11).

Относительную ошибку формирования корреляционной функции определим в виде

$$\Delta r[n] = \Delta R[n] / R[0] = \Delta R[n] / \sigma^2.$$

Пример 1. Пусть требуется имитировать на ЦВМ стационарный нормальный случайный процесс, корреляционная функция и энергетический спектр которого имеют вид

$$R(\tau) = \frac{\sigma^2}{1 + \omega_*^2 \tau^2}; \quad G(\omega) = \frac{\pi \sigma^2}{\omega_*} e^{-\left| \frac{\omega}{\omega_*} \right|}. \quad (2.29)$$

Используя формулу (2.20) при произвольной пока ω_c , получим

$$s_0(x) = \left[\frac{\pi}{\omega_c} G_0(\omega_c x) \right]^{\frac{1}{2}} = \sigma \sqrt{\gamma} e^{-\gamma |x|/2}, \quad \gamma = \frac{\omega_c}{\omega_*}.$$

Тогда

$$c_0[k] = \sigma \sqrt{\gamma} \int_0^1 e^{-\gamma x/2} \cos k\pi x dx. \quad (2.30)$$

Интеграл (2.30) является табличным [25]. После несложных преобразований получим

$$c_0[k] = 2\sigma\gamma^{3/2} \frac{1 - (-1)^{|k|} e^{-\gamma/2}}{\gamma^2 + 4\pi^2 k^2}. \quad (2.31)$$

При достаточно большой ω_c $\gamma \gg 1$ и выражение для $c_0[k]$ упрощается

$$c_0[k] = 2\sigma\gamma^{3/2} \frac{1}{\gamma^2 + 4\pi^2 k^2}. \quad (2.32)$$

Вычислив по (2.31) или (2.32) весовую функцию $c_0[k]$, можно сформировать методом скользящего суммирования последовательность $\xi[n]$ с требуемой корреляционной функцией.

Величина погрешности метода будет зависеть при этом от выбора значений γ и p . Для примера выберем $p=5$, частоту ω_c будем отсчитывать на уровне 0,01 от максимума $G(\omega)$, что равносильно выбору $\gamma=4.6$. Значения $c_0[n]$, $R[n]$, $R_s[n]$ и $\Delta R[n]$, рассчитанные при выбранных p , γ и $\sigma^2=1$ по формулам (2.31), (2.29), (2.25) и (2.28) соответственно, сведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_0[n]$	0,839	0,358	0,099	0,058	0,027	0,022	—	—	—	—	—
$R_s[n]$	0,988	0,688	0,342	0,192	0,112	0,068	0,024	0,008	0,003	0,001	0,000
$R[n]$	1,000	0,682	0,349	0,192	0,118	0,079	0,056	0,042	0,032	0,026	0,021
$\Delta R[n]$	0,012	0,006	0,007	0,000	0,006	0,001	0,032	0,034	0,029	0,025	0,021
$c'_s[n]$	0,990	0,689	0,345	0,194	0,117	0,080	0,056	0,042	0,032	0,026	0,021

Из таблицы следует, что при выбранных p и γ погрешность формирования корреляционной функции составляет несколько процентов, при этом в области малых значений корреляции погрешность возрастает.

Для расчета относительной среднеквадратической погрешности при $\sigma^2=1$ найдем:

$$\bar{s^4} = \int_0^{\infty} s^4(x) dx = \gamma^2 \int_0^{\infty} e^{-2\gamma x} dx = \frac{\gamma}{2} = 2,3;$$

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{\bar{s^4}} \int_1^{\infty} s^4(x) dx = \frac{\gamma^2}{\bar{s^4}} \int_1^{\infty} e^{-2\gamma x} dx = e^{-2\gamma} = 10^{-4}, \Delta_1 = 10^{-2};$$

$$c'_*[n] = \int_0^1 s_0^2(x) \cos n\pi x dx = \gamma^2 \frac{1 - (-1)^{|n|} e^{-\gamma}}{\gamma^2 + \pi^2 n^2}.$$

Значения $c'_*[n]$ при $\gamma=4,6$ для $n=0,1, \dots, 10$ помещены в табл. 2.1. Используя табличные значения $c'_*[n]$ и $R_*[n]=c_*[n]$, получим

$$\sum_{-10}^{10} (c'_*[n] - c_*[n])^2 = 8,5 \cdot 10^{-3}.$$

Величину второй суммы в формуле (2.27) оценим следующим образом

$$\begin{aligned} 2 \sum_{2p+1}^{\infty} (c'_*[n])^2 &= 2\gamma^4 \sum_{2p+1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n e^{-\gamma}}{\gamma^2 + \pi^2 n^2} \right]^2 \approx \\ &\approx 2\gamma^4 \sum_{2p+1}^{\infty} \frac{1}{(\gamma^2 + \pi^2 n^2)} < \frac{2\gamma^4}{\pi^4} \sum_{2p+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2\gamma^4}{\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_1^{2p+1} \frac{1}{n^4} \right) = \\ &= \frac{2 \cdot 4,6^4}{\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_1^{11} \frac{1}{n^4} \right) = 10,5 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Следовательно, погрешность за счет ограничения ряда $c_0[n]$ согласно (2.27) оценивается величиной

$$\Delta_2^2 = \frac{8,5 \cdot 10^{-3} + 10,5 \cdot 10^{-3}}{2,3} = 8,3 \cdot 10^{-3}.$$

Общая погрешность $\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 = 8,4 \cdot 10^{-3}$, $\Delta = 0,09$.

Из расчетов видно, что величина относительной среднеквадратической погрешности Δ несколько больше величины относительной погрешности формирования корреляционной функции $\Delta R[n]$, но имеет тот же порядок.

Итак, описанный метод определения весовых коэффициентов приводит к приближенным формулам скользящего суммирования для моделирования стационарных

нормальных случайных процессов. При этом может быть достигнута сколь угодно высокая степень приближения.

Заканчивая рассмотрение этого метода моделирования, заметим, что в основу его положена идея формирующего фильтра, включающая три момента: 1) пропускание белого шума через линейный непрерывный фильтр; 2) подбор такой передаточной функции фильтра, которая обеспечивает энергетический спектр шума на выходе, равный энергетическому спектру моделируемого процесса; 3) дискретизация процессов с целью воспроизведения фильтрации на ЦВМ. Особенностью при этом было то, что формирующий непрерывный фильтр отыскивался для простоты в классе *физически неосуществимых* линейных фильтров с *четной* импульсной переходной характеристикой.

При моделировании случайных процессов с рациональным спектром можно найти физически осуществимые непрерывные формирующие фильтры, используя *метод факторизации*.

3. Получение весовых коэффициентов методом факторизации

В рассматриваемых выше методах синтеза формирующих дискретных фильтров для моделирования случайных процессов путем скользящего суммирования не использовались специальные свойства корреляционных функций моделируемых случайных процессов.

На практике значительный интерес представляют стационарные случайные процессы, у которых корреляционные функции таковы, что преобразования Фурье от них являются рациональными функциями, т. е.

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{G_1(\omega)}{G_2(\omega)}, \quad (2.33)$$

где $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ — полиномы степени l' и $m' > l'$ соответственно. Это свойство позволяет синтезировать формирующие фильтры для моделирования случайных процессов данного класса другим по сравнению с описанными выше способом, основанным на следующих фактах.

Случайные процессы с *рациональной спектральной плотностью* (2.33) наблюдаются, как известно, на выходе линейных систем с постоянными сосредоточенными параметрами при воздействии на входе белого шума. Передаточная функция $K(j\omega)$ таких систем является дробно-рациональной функцией вида

$$K(j\omega) = \frac{K_1(j\omega)}{K_2(j\omega)}, \quad (2.34)$$

где $K_1(j\omega)$ и $K_2(j\omega)$ — полиномы по $j\omega$ степени l и $m > l$ соответственно. При воздействии белого шума с единичной спектральной плотностью на систему с передаточной функцией (2.34) на выходе системы будет случайный процесс с энергетическим спектром

$$G(\omega) = |K(j\omega)|^2 = K(j\omega)K(-j\omega) = \frac{K_1(j\omega)}{K_2(j\omega)} \frac{K_1(-j\omega)}{K_2(-j\omega)}. \quad (2.35)$$

Произведя в (2.35) умножение, получим (2.33).

При моделировании случайных процессов с рациональным спектром фильтр с передаточной функцией (2.34) целесообразно взять в качестве формирующего, но для этого нужно, зная дробно-рациональную спектральную функцию (2.33), найти передаточную функцию (2.34) формирующего фильтра. Последнее можно сделать путем факторизации спектральной функции $G(\omega)$, т. е. разложения ее на множители вида

$$G(\omega) = \frac{G_1(\omega)}{G_2(\omega)} = \frac{K_1(j\omega)}{K_2(j\omega)} \frac{K_1(-j\omega)}{K_2(-j\omega)}. \quad (2.36)$$

Множитель $K_1(j\omega)/K_2(j\omega)$ в формуле (2.36) и будет передаточной функцией $K(j\omega)$ формирующего фильтра [см. (2.33) и (2.35)].

Порядок проведения факторизации следует из теоремы о разложении неотрицательных дробно-рациональных функций на множители [30, 70]: всякая неотрицательная дробно-рациональная относительно ω функция

$$\frac{G_1(\omega)}{G_2(\omega)} = C' \frac{\prod_{k=1}^{l'} (\omega - \omega'_{1k})}{\prod_{k=1}^{m'} (\omega - \omega'_{2k})} \quad (2.37)$$

может быть представлена в виде

$$\frac{G_1(\omega)}{G_2(\omega)} = C \left| \frac{\prod_{k=1}^l (\omega - \omega_{1k})}{\prod_{k=1}^m (\omega - \omega_{2k})} \right|^2,$$

где C' и C — некоторые константы; ω_{1k} и ω_{2k} — те из корней ω'_{1k} и ω'_{2k} в первоначальном представлении дробно-рациональной функции (2.37), которые лежат в верхней полуплоскости.

Согласно этой теореме для нахождения передаточной функции непрерывного формирующего фильтра методом факторизации нужно найти корни ω'_{1k} и ω'_{2k} числителя $G_1(\omega)$ и знаменателя $G_2(\omega)$ соответственно заданной дробно-рациональной спектральной функции (2.33); выбрать из них корни ω_{1k} и ω_{2k} , лежащие в верхней полуплоскости (корни с положительной мнимой частью), и записать искомую передаточную функцию в виде

$$K(j\omega) = \sqrt{C} \frac{\prod_{k=1}^l (j\omega - j\omega_{1k})}{\prod_{k=1}^m (j\omega - j\omega_{2k})} = \sqrt{C} \frac{\prod_{k=1}^l (p - p_{1k})}{\prod_{k=1}^m (p - p_k)} = K(p), \quad (2.38)$$

$$p_{1k} = j\omega_{1k}, \quad p_k = j\omega_{2k}.$$

При этом множитель C должен выбираться из условия

$$|K(j\omega)|^2 = G(\omega).$$

После того как найдена передаточная функция непрерывного фильтра, нетрудно получить весовые коэффициенты в формуле скользящего суммирования. В самом деле, импульсная переходная характеристика формирующего фильтра согласно известной теореме разложения [41] имеет вид

$$h(t) = \sum_{\nu=1}^s \sum_{\mu=0}^{r_\nu-1} C_{\nu\mu} \frac{t^\mu}{\mu!} e^{p_\nu t}, \quad (2.39)$$

где p_ν — полюсы передаточной функции (2.38) (корни знаменателя) кратности r_ν каждый ($r_1 + r_2 + \dots + r_s = m$);

$$C_{\nu\mu} = \frac{1}{(r_\nu - \mu - 1)!} \frac{d^{r_\nu - \mu - 1}}{dp^{r_\nu - \mu - 1}} [K(p)(p - p_\nu)^{r_\nu}] \Big|_{p=p_\nu}. \quad (2.40)$$

Пусть на входе фильтра с импульсной переходной характеристикой (2.39) воздействует непрерывный белый шум с единичной спектральной плотностью, т. е. с корреляционной функцией

$$R_x(\tau) = \delta(\tau). \quad (2.41)$$

Тогда случайный процесс $\xi(t)$ на выходе фильтра будет иметь заданный энергетический спектр $G(\omega)$. Для получения алгоритма формирования дискретных реализаций этого процесса запишем процесс фильтрации белого шума в виде интеграла Дюамеля

$$\xi(t) = \int_0^\infty h(\tau) x_s(t - \tau) d\tau. \quad (2.42)$$

Шум $x_s(t)$ с корреляционной функцией (2.41) имеет бесконечную дисперсию. Это создает неудобства при дискретизации уравнения (2.42). Для упрощения, так же как это было сделано в п. 2 данного параграфа, заменим белый шум $x_s(t)$ с неограниченным спектром белым нормальным шумом $x_0(t)$ с ограниченной частотой ω_c спектром и выберем частоту ω_c так, чтобы в полосе $(-\omega_c, \omega_c)$ находилась подавляющая часть мощности процесса $\xi(t)$. Тогда процесс $\xi(t)$ с достаточной точностью можно представить в виде

$$\xi(t) = \int_0^t h(\tau) x_0(t - \tau) d\tau, \quad (2.43)$$

где нормальный шум $x_0(t)$ имеет конечную дисперсию, равную $\sigma_0^2 = \frac{\omega_c}{\pi}$ (площадь прямоугольника с основанием $2\omega_c$ и единичной высотой, поделенная на 2π), и некоррелированные в точках $t_n = n\Delta t = n \frac{\pi}{\omega_c}$ значения. Заменяя теперь интеграл (2.43)

суммой с шагом Δt , получим алгоритм формирования дискретных реализаций процесса $\xi(t)$ в виде

$$\xi[n] = \xi(n\Delta t) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x_0[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x[n-k], \quad (2.44)$$

где $h[k] = h(k\Delta t)$ — дискретные значения импульсной переходной характеристики формирующего фильтра; $c_k = \Delta t \sigma_0 h[k] = \sqrt{\Delta t} h[k]$; $x[n]$ — независимые нормальные случайные числа с параметрами $(0, 1)$.

Алгоритм (2.44) является алгоритмом скользящего суммирования с весовой функцией, равной (с точностью до множителя) дискретным значениям импульсной переходной характеристики $h(t)$ формирующего фильтра, определяемой формулой (2.39). При использовании алгоритма (2.44) бесконечная сумма практически заменяется конечной.

Пример 2. Найдем весовую функцию для моделирования случайного процесса с корреляционной функцией и энергетическим спектром вида

$$R(\tau) = e^{-\omega_* |\tau|}, \quad G(\omega) = \frac{2\omega_*}{\omega^2 + \omega_*^2}. \quad (2.45)$$

Корни знаменателя спектральной функции $G(\omega)$ равны $\omega_{1,2} = \pm j\omega_*$.

Передаточная функция формирующего фильтра согласно (2.38) имеет вид

$$K(p) = \sqrt{C} \frac{1}{p + \omega_*}.$$

Из условия $|K(j\omega)|^2 = G(\omega)$ следует $\sqrt{C} = \sqrt{2\omega_*}$. По формулам (2.39) и (2.40) при $s=r_1=1$, $p_1=-\omega_*$ найдем импульсную переходную характеристику формирующего фильтра

$$h(t) = \sqrt{C} e^{-\omega_* t} = \sqrt{2\omega_*} e^{-\omega_* t}.$$

Отсюда в соответствии с (2.44) окончательно получим

$$c_k = \sqrt{2\omega_* \Delta t} e^{-\omega_* \Delta t k} = \sqrt{2\gamma} e^{-\gamma k}, \quad \gamma = \omega_* \Delta t.$$

В рассматриваемом примере спектральная функция допускает простую факторизацию. Однако это не всегда имеет место. При факторизации спектральных функций высокого порядка требуется находить корни полиномов степени выше второй, что в общем случае затруднительно и что ограничивает применение метода факторизации.

4. Некоторые специальные способы получения весовых коэффициентов

В некоторых задачах при моделировании нормального случайного процесса $\xi(t)$ бывает известна не только его корреляционная функция и энергетический спектр, но и то, что этот процесс является результатом воздействия белого шума на линейную систему с заданной передаточной функцией $K(p)$ (не обязательно дробно-рациональной) и импульсной переходной характеристикой $h(t)$. При моделировании данную линейную систему целесообразно использовать как формирующий фильтр. Подвергнув процесс фильтрации белого шума дискретизации (используя при этом заданную импульсную переходную характеристику фильтра), получим аналогично тому, как было сделано в п. 3 этого параграфа, алгоритм скользящего суммирования для моделирования случайного процесса $\xi(t)$. В этом алгоритме весовые коэффициенты c_k будут совпадать с точностью до постоянного множителя с дискретной импульсной переходной характеристикой фильтра $h[k] = h(k\Delta t)$ [формула (2.44)].

В рассматриваемом случае подготовительная работа очень простая. Рассмотренные выше методы получения весовых коэффициентов требуют более сложной подготовительной работы, так как в них предполагается, что характеристики формирующего фильтра заранее неизвестны и должны быть определены тем или иным путем.

В заключение этого параграфа укажем на один пример стационарного случайного процесса, для моделирования которого с помощью скользящей суммы можно получить необходимую весовую функцию c_k , не прибегая к универсальным методам.

Пусть $c_k = c$, тогда согласно (2.9)

$$R[n] = \begin{cases} (N - |n|) c^2, & |n| \leq N - 1, \\ 0, & |n| > N - 1. \end{cases}$$

Это соответствует треугольной корреляционной функции вида

$$R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right), & |\tau| \leq \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0, \end{cases} \quad (2.46)$$

когда отношение

$$N = \tau_0 / \Delta t \quad (2.47)$$

является целым числом.

Это открывает следующий простой путь отыскания весовой функции формирующего фильтра для моделирования случайного процесса с треугольной корреляционной функцией вида (2.46): выбрав отношение $\tau_0 / \Delta t$ целым, по (2.47) находим N ; значения c_1, c_N берем одинаковым и равными

$$c = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Алгоритм формирования случайного процесса с треугольной корреляционной функцией сводится к скользящему равновесному сум-

мированию ортонормированной последовательности случайных чисел по формуле

$$\xi[n] = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N x[n-k]. \quad (2.48)$$

Отметим, что в этом случае при моделировании нормального случайного процесса исходная последовательность $x[n]$ может иметь равномерное распределение, так как при суммировании N равномерно распределенных случайных чисел с одинаковыми параметрами закон распределения суммы будет близок к нормальному уже при $N=3$. Так, например, если последовательность $x[n]$ имеет равномерное распределение в интервале $(0, 1)$ (случайные числа из датчика), то для моделирования нормального случайного процесса с треугольным законом корреляции можно воспользоваться алгоритмом

$$\xi[n] = \sigma \sqrt{\frac{12}{N}} \left(\sum_{k=0}^N x[n-k] - \frac{N}{2} \right), \quad N > 3.$$

Этот алгоритм не требует нормализации исходной последовательности: формирование корреляционных связей и нормализация производятся одновременно.

Приведенный пример указывает на то, что необходимую весовую функцию формирующего фильтра в некоторых случаях можно находить, подбирая такую дискретную функцию $c[n]$, которая при свертке с собой, согласно (2.10) или (2.25), дает требуемую корреляционную функцию $R[n]$.

2.3. Моделирование стационарных случайных процессов с помощью рекуррентных разностных уравнений

Рекуррентные алгоритмы вида (2.2) пригодны только для моделирования случайных процессов с рациональным спектром. Применение рекуррентных уравнений наиболее эффективно, когда корреляционные функции моделируемых процессов имеют невысокий порядок, определяемый числом полюсов спектральной функции, так как в этих случаях моделирующие алгоритмы очень просты, *не имеют методической погрешности* и их параметры удается выразить в явном виде через параметры корреляционной функции.

Отсутствие методической погрешности понимается здесь в том смысле, что дискретные реализации ${}^k\xi[n]$, полученные на ЦВМ, и последовательности ${}^k\xi(n\Delta t)$ выборочных значений процесса $\xi(t)$ в точности совпадают при любом шаге Δt , если пренебречь погрешностью

округления чисел в ЦВМ и считать исходные случайные числа $x[n]$ строго независимыми и нормальными.

Рассмотрим два метода получения параметров рекуррентных алгоритмов по заданным корреляционной функции $R(\tau)$ и энергетическому спектру $G(\omega)$ моделируемого непрерывного процесса.

1. Получение параметров рекуррентных алгоритмов методом факторизации

Пусть $\xi(t)$ — непрерывный стационарный случайный процесс с рациональной спектральной плотностью (2.33). Можно показать [30], что корреляционная функция этого процесса имеет вид

$$R(\tau) = \sum_k C_k e^{\lambda_k \tau}, \quad \lambda_k = \alpha_k + j\beta_k, \quad \beta_k > 0, \quad (2.49)$$

где C_k многочлены относительно τ [при кратных корнях $K_2(j\omega)$].

Для вещественных процессов комплексной записи (2.36) соответствует вещественная форма записи

$$R(\tau) = \sum_k [A_k(\tau) \cos \alpha_k \tau + B_k(\tau) \sin \alpha_k |\tau|] e^{-\beta_k |\tau|},$$

где $A_k(\tau)$ и $B_k(\tau)$ — многочлены относительно τ .

Таков общий вид корреляционной функции случайных процессов с рациональным спектром. Корреляционная функция соответствующих дискретных процессов $\xi[n] = \xi(n\Delta t)$ в общем виде запишется

$$R[n] = \sum_k (A_k[n] \cos \bar{\alpha}_k n + B_k[n] \sin \bar{\beta}_k |n|) e^{-\bar{\beta}_k |n|}, \quad (2.50)$$

где $A_k[n], B_k[n]$ — дискретные многочлены; $\bar{\alpha}_k = \alpha_k \Delta t$, $\bar{\beta}_k = \beta_k \Delta t$ — безразмерные параметры.

Для дискретного случайного процесса $\xi[n]$ по аналогии с непрерывным случайным процессом $\xi(t)$ вводится понятие спектральной плотности (энергетического спектра) в виде (см., например, [85])

$$\Phi(\bar{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R[n] e^{-j\bar{\omega}n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R[n] z^n, \quad z = e^{-j\bar{\omega}}, \quad (2.51)$$

где $\bar{\omega} = \omega \Delta t$ — безразмерная частота. Спектральная функция $\Phi(\bar{\omega})$ дискретного случайного процесса согласно определению (2.51) является двусторонним дискретным преобразованием Лапласа от его корреляционной функции. Подобно энергетическому спектру $G(\omega)$ непрерывного случайного процесса функция $\Phi(\bar{\omega})$ неотрицательна. Эти две функции, как известно [85], связаны следующим соотношением:

$$\Delta t \Phi(\omega \Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - 2\omega_c n),$$

где $\omega_c = \pi/\Delta t$ — частота дискретизации.

Можно показать [30], что спектральная плотность $\Phi(\bar{\omega})$ дискретного случайного процесса с корреляционной функцией вида (2.50) является рациональной функцией относительно $z = e^{-j\bar{\omega}}$:

$$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{A'(e^{-j\bar{\omega}})}{B'(e^{-j\bar{\omega}})} = \frac{A'(z)}{B'(z)} = F(z), \quad (2.52)$$

где

$$A'(z) = A'_0 + A'_1 z + \dots + A'_{l'} z^{l'};$$

$$B'(z) = B'_0 + B'_1 z + \dots + B'_{m'} z^{m'}.$$

Для вещественных процессов все коэффициенты $\overline{A'_0}, \overline{A'_{l'}}, \overline{B'_0}, \overline{B'_{m'}}$ — вещественные числа.

Известно [85], что при воздействии дискретного белого нормированного шума $x[n]$ на дискретный линейный фильтр с передаточной функцией

$$K_*(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

на выходе фильтра будет дискретный случайный процесс со спектральной плотностью, равной квадрату модуля передаточной функции:

$$F(z) = \left| \frac{A(z)}{B(z)} \right|^2 = \frac{A(z)}{B(z)} \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{A'(z)}{B'(z)}. \quad (2.53)$$

Если $A(z)$ и $B(z)$ — полиномы, то спектральная функция (2.53) является рациональной. Сравняя (2.53)

с (2.52), видим, что дискретный процесс $\xi[n]$, порождаемый непрерывным случайным процессом $\xi(t)$ с рациональным спектром, можно получить, пропуская дискретный белый шум через дискретный линейный фильтр с рациональной передаточной функцией $K_*(z)$, удовлетворяющей условию $|K_*(z)|^2 = F(z)$ или

$$\left| \frac{A(z)}{B(z)} \right|^2 = \frac{A'(z)}{B'(z)}. \quad (2.54)$$

Зная дробно-рациональную передаточную функцию $K_*(z)$, путем идентификации легко можно найти параметры рекуррентного алгоритма вида (2.2) для осуществления на ЦВМ дискретной фильтрации.

В этом и состоит суть рассматриваемого метода моделирования случайных процессов [77, 101]. Подготовительная работа здесь включает в себя три этапа.

1. Нахождение спектральной плотности $F(z)$ (если она неизвестна) моделируемого процесса $\xi[n]$ по корреляционной функции $R[n]$ с помощью двустороннего дискретного преобразования Лапласа (2.51).

2. Факторизация спектральной функции $F(z)$, т. е. разбиение ее в соответствии с (2.53) на два сомножителя:

$$F(z) = \frac{A'(z)}{B'(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = |K_*(z)|^2. \quad (2.55)$$

3. Преобразование передаточной функции $K_*(z)$ к виду (2.4):

$$K_*(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_l z^l}{1 + b_1 z + \dots + b_m z^m}$$

с целью получения параметров a_k и b_k моделирующего рекуррентного алгоритма вида (2.2).

Последний этап сводится к простой нормировке путем деления числителя и знаменателя передаточной функции $K_*(z)$ на коэффициент при нулевой степени z в знаменателе. Более сложными являются первый и второй этапы.

На первом этапе требуется привести к замкнутому виду бесконечную сумму (2.51). Для этого можно использовать таблицу изображений функций в смысле дискретного преобразования Лапласа. Такие таблицы имеются, например, в [85]. Если таблицы содержат лишь

односторонние преобразования Лапласа, то для получения двухстороннего преобразования можно использовать соотношение

$$F(z) = F^+(z) + F^+(z^{-1}) - R[0], \quad (2.56)$$

где

$$F^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} R[n] z^n \quad (2.57)$$

— одностороннее z -преобразование корреляционной функции. Для нахождения изображения $F(z)$ корреляционную функцию $R[n]$, заданную в виде (2.50), в общем случае целесообразно представить в комплексной форме (2.49). Тогда ряд (2.51) разобьется на сумму рядов вида

$$F_{rs}^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^r e^{\lambda_s n} z^n, \quad (2.58)$$

изображение которых ([85]^{*}), стр. 899)

$$F_{rs}^+(z) = \frac{z e^{\lambda_s}}{(1 - z e^{\lambda_s})^{r+1}} Q_{r-1}(z e^{\lambda_s}), \quad r \geq 1, \quad (2.59)$$

$$F_{0s}^+(z) = \frac{1}{(1 - z e^{\lambda_s})},$$

где $Q_r(z)$ — многочлены степени r . Первые пять многочленов имеют вид ([85], стр. 159):

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= 1, \\ Q_1(z) &= 1 + z, \\ Q_2(z) &= 1 + 4z + z^2, \\ Q_3(z) &= 1 + 11z + 11z^2 + z^3, \\ Q_4(z) &= 1 + 26z + 66z^2 + 26z^3 + z^4. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Остальные $Q_r(z)$ можно найти, вычисляя специальный определитель или дифференцируя соответствующую производящую функцию [85].

Найдя изображения $F_{rs}^+(z)$ и просуммировав их по r и s , по формуле (2.56) получим спектральную плотность $F(z)$ в виде (2.52).

^{*} Переменная z в наших обозначениях равна e^{-q} в обозначениях [85].

Наибольшие трудности встречаются на этапе факторизации. Факторизация спектральной функции $F(z)$ дискретного случайного процесса, так же как и факторизация спектральной функции $G(\omega)$ непрерывного процесса (§ 2.2.), связана с нахождением корней полиномов, стоящих в числителе и знаменателе спектральной функции $F(z)$, и вытекает из следующей теоремы о разложении дробно-рациональных неотрицательных функций [30, 70]: всякая неотрицательная рациональная относительно $z = e^{-j\omega}$ функция

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{A'(z)}{B'(z)} = \frac{A'_0 + A'_1 z + \dots + A'_l z^l}{B'_0 + B'_1 z + \dots + B'_{m'} z^{m'}} = \\
 &= \frac{C' \prod_{k=1}^{l'} (z - v'_k)}{\prod_{k=1}^{m'} (z - w'_k)} \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \left| \frac{A_0 + A_1 z + \dots + A_l z^l}{B_0 + B_1 z + \dots + B_m z^m} \right|^2 = C \left| \frac{\prod_{k=1}^l (z - v_k)}{\prod_{k=1}^m (z - w_k)} \right|^2 = \\
 &= C \frac{\prod_{k=1}^l (z - v_k) \prod_{k=1}^l (z^{-1} - v_k^*)}{\prod_{k=1}^m (z - w_k) \prod_{k=1}^m (z^{-1} - w_k^*)} = \frac{A(z)}{B(z)} \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})}, \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

где C' и C — некоторые константы; при этом корни v_k — те из корней v'_k в (2.61), которые по модулю больше единицы, и половина тех корней v'_k , которые по модулю равны единице, корни w_k — те из корней w'_k , которые по модулю больше единицы.

Из теоремы следует, что для осуществления факторизации нужно найти корни v'_k числителя $A'(z)$ и w'_k знаменателя $B'(z)$ спектральной функции $F(z)$; выбрать

из них корни, модуль которых больше или равен единице, и взять их в качестве корней числителя и знаменателя искомой передаточной функции $K_*(z)$. Тогда

$$K_*(z) = \sqrt{C} \frac{\prod_{k=1}^l (z - v_k)}{\prod_{k=1}^m (z - w_k)} = \frac{A(z)}{B(z)}.$$

Множитель C выбирается из условия

$$C \left| \frac{\prod_{k=1}^l (z - v_k)}{\prod_{k=1}^m (z - w_k)} \right|^2 = \frac{A'(z)}{B'(z)} = F(z).$$

Практически при использовании одностороннего z -преобразования приходится определять лишь корни числителя, так как общий знаменатель в сумме (2.56) автоматически оказывается разложенным в произведение $B(z)B(z^{-1})$.

Рассмотрим порядок проведения подготовительной работы на конкретных примерах.

Пример 1. Пусть требуется найти дискретную передаточную функцию формирующего фильтра для цифрового моделирования стационарного случайного процесса с рациональным спектром, корреляционная функция которого имеет вид

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\omega_* |\tau|} \cos \omega_0 \tau. \quad (2.63)$$

Корреляционная функция соответствующего дискретного процесса равна

$$R[n] = \sigma^2 e^{-\gamma_* |n|} \cos \gamma_0 n, \quad (2.64)$$

где $\gamma_* = \omega_* \Delta t$, $\gamma_0 = \omega_0 \Delta t$.

В дальнейшем, не нарушая общности рассуждений, положим $\sigma^2 = 1$, тогда $R[0] = 1$. Запишем функцию $R[n]$ для $n \geq 0$ в комплексной форме:

$$R[n] = \frac{1}{2} e^{\lambda_1 n} + \frac{1}{2} e^{\lambda_2 n}, \quad \lambda_{1,2} = -\gamma_* \pm j\gamma_0.$$

Изображения $F_{rs}^+(z)$ согласно (2.58) — (2.60) равны

$$F_{0s}^+(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_s n} z^n = \frac{1}{2(1 - z e^{\lambda_s})}, \quad s = 1, 2.$$

Отсюда

$$F^+(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{\lambda_1} z} + \frac{1}{1 + e^{\lambda_2} z} \right) =$$

$$= \frac{1 - \rho \cos \gamma_0 z}{1 - 2\rho \cos \gamma_0 z + \rho^2 z^2}, \quad \rho = e^{-\gamma_*}. \quad (2.65)$$

Следовательно, спектральная функция $F(z)$ в соответствии с (2.56) имеет вид

$$F(z) = \frac{1 - \rho \cos \gamma_0 z}{1 - 2\rho \cos \gamma_0 z + \rho^2 z^2} +$$

$$+ \frac{1 - \rho \cos \gamma_0 z^{-1}}{1 - 2\rho \cos \gamma_0 z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} - 1.$$

После приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов получим

$$F(z) = \frac{-z^{-1} [(1 - \rho^2) \rho \cos \gamma_0 - (1 - \rho^4) z + (1 - \rho^2) \rho \cos \gamma_0 z^2]}{(1 - 2\rho \cos \gamma_0 z + \rho^2 z^2)(1 - 2\rho \cos \gamma_0 z^{-1} + \rho^2 z^{-2})} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ (1 - \rho^2) \rho \cos \gamma_0 z^2}{+ \rho^2 z^{-2}} = \frac{-z^{-1} (A_0 + A_1 z + A_0 z^2)}{|1 + B_1 z + B_2 z^2|^2},$$

где

$$A_0 = (1 - \rho^2) \rho \cos \gamma_0, \quad A_1 = -(1 - \rho^4), \quad B_1 = -2\rho \cos \gamma_0, \quad B_2 = \rho^2.$$

Знаменатель $F(z)$ представляет собой произведение двух множителей требуемой формы, т. е. в факторизации знаменателя нет надобности. Это *всегда* будет иметь место при использовании такой последовательности подготовительной работы.

Для факторизации числителя найдем его корни:

$$v'_{1,2} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_0^2}}{2A_0} = -\frac{A_1}{2A_0} \pm \sqrt{\frac{A_1^2}{4A_0^2} - 1} =$$

$$= v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 1},$$

$$v_0 = \frac{1 + \rho^2}{2\rho \cos \gamma_0} = \frac{\operatorname{ch} \gamma_*}{\operatorname{ch} \gamma_0}. \quad (2.66)$$

В данном случае ввиду симметрии уравнения $A_0 + A_1 z + A_0 z^2 = 0$ анализ корней для выяснения величины их модуля не требуется, и в качестве корня v_1 окончательного выражения вида (2.62) можно брать любой из корней $v'_{1,2}$. В этом можно убедиться, подставив в уравнение

$$-z^{-1} (A_0 + A_1 z + A_0 z^2) = C (z - v_1) (z^{-1} - v_1) \quad (2.67)$$

вместо v_1 значения корней из (2.66). Действительно, уравнение (2.67) обращается в тождество при

$$C = \frac{A_0}{v'_{1,2}}.$$

Таким образом, дискретная передаточная функция формирующего фильтра и рекуррентный алгоритм для моделирования случайного процесса с корреляционной функцией $R[n] = e^{-\gamma_* |n|} \cos \gamma_0 n$ имеют соответственно вид

$$K_*(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 + b_1 z + b_2 z^2},$$

где $\xi[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] - b_1 \xi[n-1] - b_2 \xi[n-2]$,

$$a_0 = -\sqrt{C} v'_{1,2} = -\sqrt{A_0 v'_{1,2}}; \quad a_1 = \sqrt{C} = \sqrt{A_0 v'_{1,2}};$$

$$b_1 = B_1 = -2\rho \cos \gamma_0; \quad b_2 = B_2 = \rho^2;$$

$$A_0 = (1 - \rho^2) \rho \cos \gamma_0 = 2 e^{-2\gamma_*} \operatorname{sh} \gamma_* \cos \gamma_0;$$

$$v'_{1,2} = v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 1}; \quad v_0 = \frac{1 + \rho^2}{2\rho \cos \gamma_0} = \frac{\operatorname{ch} \gamma_*}{\cos \gamma_0}; \quad \rho = e^{-\gamma_*}.$$

Заметим, что квадрат модуля передаточной функции $K_*(z)$, очевидно, не изменится, а следовательно, не изменится и корреляционная функция формируемого процесса, если знаки перед коэффициентами a_0 и a_1 изменить на обратные или же поменять коэффициенты a_0 и a_1 местами.

Пример 2. Рассмотрим теперь случайный процесс $\xi(t)$ с экспоненциальной корреляционной функцией:

$$R(\tau) = e^{-\gamma_* |\tau|}, \quad R[n] = e^{-\gamma_* |n|}. \quad (2.68)$$

Эта корреляционная функция является частным видом корреляционной функции (2.64) при $\gamma_0 = 0$. Положив в формуле (2.65) $\gamma_0 = 0$, получим

$$F_+(z) = \frac{1 - \rho z}{1 - 2\rho z + \rho^2 z^2} = \frac{1}{1 - \rho z}.$$

Отсюда согласно (2.56) легко находим функцию спектральной плотности дискретного процесса $\xi[n]$:

$$F(z) = \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho z)(1 - \rho z^{-1})}. \quad (2.69)$$

Следовательно, дискретная передаточная функция и рекуррентный алгоритм для цифрового моделирования случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией (2.68) имеют вид

$$K_*(z) = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{1 - \rho z}, \quad (2.70)$$

$$\xi[n] = \sqrt{1 - \rho^2} x[n] + \rho \xi[n-1], \quad \rho = e^{-\gamma_*}.$$

Из приведенного примера моделирования случайного процесса с экспоненциально-косинусной корреляционной функцией (корреляционная функция второго порядка) видно, что подготовительная работа для получения параметров рекуррентного алгоритма является довольно громоздкой. С увеличением порядка корреляционной функции объем вычислений еще более возрастает. Поэтому для моделирования случайных процессов с рациональным спектром подготовительную работу для распространенных типов корреляционных функций целесообразно проделать заранее [16]. Этот вопрос будет рассмотрен в § 2.6.

2. Получение параметров рекуррентных алгоритмов методом дискретизации непрерывных формирующих фильтров

Предположим, что известна импульсная переходная характеристика $h(t)$ линейного непрерывного формирующего фильтра с постоянными сосредоточенными параметрами, на выходе которого образуется заданный случайный процесс $\xi(t)$ при воздействии на входе белого шума $x_b(t)$ с корреляционной функцией (2.41). Если функция $h(t)$ неизвестна, ее можно найти методом факторизации заданной рациональной спектральной функции $G(\omega)$ процесса $\xi(t)$ (см. § 2.2).

Покажем, что при соответствующей дискретной аппроксимации процесса фильтрации белого шума непрерывным формирующим фильтром можно получить рекуррентные алгоритмы, не обладающие методической погрешностью, для моделирования случайных процессов с рациональным спектром в отличие от приближенных алгоритмов скользящего суммирования, которые получались ранее при дискретизации формирующих фильтров.

Поясним это на следующем примере.

Пусть непрерывный случайный процесс $\xi(t)$ есть реакция линейной системы с импульсной переходной характеристикой вида $h(t) = C e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, на воздействие белого шума $x_b(t)$ с единичной спектральной плотностью, т. е. с корреляционной функцией (2.41). Выразим процесс $\xi(t)$ через

входной сигнал с помощью интеграла Дюамеля

$$\xi(t) = \int_0^t x_{\delta}(\tau) h(t-\tau) d\tau = C \int_0^t x_{\delta}(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau.$$

Значение процесса $\xi(t)$ в точке $t + \Delta t$ равно

$$\xi(t + \Delta t) = C \int_0^{t+\Delta t} x_{\delta}(\tau) e^{-\alpha(t+\Delta t-\tau)} d\tau. \quad (2.71)$$

Если разбить интервал интегрирования в формуле (2.71) на два смежных: $(0, t)$ и $(t, t + \Delta t)$ (рис. 2.4) и вынести при интегрировании в первом интервале множитель $e^{-\alpha\Delta t}$, то получим

$$\begin{aligned} \xi(t + \Delta t) &= e^{-\alpha\Delta t} C \int_0^t x_{\delta}(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau + \\ &+ C \int_t^{t+\Delta t} x_{\delta}(\tau) e^{-\alpha(t+\Delta t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha\Delta t} \xi(t) + \Delta\xi. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Случайные величины $\xi(t)$ и $\Delta\xi$ независимы между собой, так как они являются интегралами от белого шума по не-

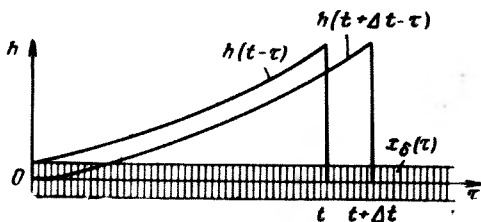


Рис. 2.4.

перекрывающимся промежуткам. Используя свойство дельта-коррелированности шума $x_{\delta}(t)$, нетрудно убедиться, что дисперсия случайной величины $\Delta\xi$ равна

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}^2 &= \int_t^{t+\Delta t} h^2(t + \Delta t - \tau) d\tau = \int_0^{\Delta t} h^2(t) dt = \\ &= C^2 \int_0^{\Delta t} e^{-2\alpha t} dt = \frac{C^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Из (2.72) и (2.73) получаем следующий рекуррентный алгоритм для формирования значений случайного процесса $\xi(t)$ в точках $t_n = n\Delta t$:

$$\begin{aligned} \xi[n] &= e^{-\alpha\Delta t} \xi[n-1] + \sigma x[n] = \\ &= \rho \xi[n-1] + \sqrt{(C_0^2/2\alpha)(1-\rho^2)} x[n], \end{aligned} \quad (2.74)$$

где $\rho = e^{-\alpha\Delta t}$; $x[n]$ — последовательность независимых случайных чисел с параметрами $(0, 1)$.

При $C^2 = 2\alpha$ и $\alpha = \omega_*$ алгоритм (2.74) совпадает с алгоритмом (2.70), полученным с использованием факторизации для случайного процесса с корреляционной функцией (2.68).

Возможность вычисления интеграла свертки (2.71) в более экономичном рекуррентном виде (2.72) основана на том свойстве экспоненциальной весовой функции, что сдвиг экспоненты $e^{-\alpha t}$ по времени на величину Δt равносильно умножению ее на постоянный множитель $\rho = e^{-\alpha\Delta t}$:

$$e^{-\alpha(t+\Delta t)} = e^{-\alpha t} e^{-\alpha\Delta t} = \rho e^{-\alpha t}. \quad (2.75)$$

Это объясняет природу рекуррентности. Действительно, при вычислении $\xi(t)$ входной сигнал $x_\delta(\tau)$ должен быть проинтегрирован в интервале $(0, t)$ с весом $e^{-\alpha(t-\tau)}$ [см. рис. 2.4, где показан график функции $h(t-\tau) = C e^{-\alpha(t-\tau)}$ и условно показан шум $x_\delta(\tau)$]. При переходе к вычислению $\xi(t + \Delta t)$ требуется снова проинтегрировать входной сигнал $x_\delta(\tau)$ на интервале $(0, t)$, но уже с весом $\rho e^{-\alpha(t-\tau)}$ и добавить интеграл от $x_\delta(\tau)$ в пределах от t до $t + \Delta t$ с весом $\rho e^{-\alpha(t-\tau)}$. Экономия при вычислениях состоит в том, что интеграл от $x_\delta(\tau)$ на интервале $(0, t)$ не вычисляется повторно с измененной весовой функцией, а получается в соответствии с (2.75) умножением на ρ уже вычисленного интеграла $\xi(t)$.

Рассмотренный прием получения рекуррентных алгоритмов допускает обобщения. Так, например, если у непрерывной системы передаточная функция

$$K(p) = \frac{K_1(p)}{K_2(p)}$$

имеет простые вещественные корни, то ее импульсная переходная характеристика $h(t)$ является в соответствии с (2.39) суперпозицией экспонент:

$$h(t) = \sum_{k=1}^m C_k e^{p_k t}, \quad (2.76)$$

где $C_k = \frac{K_1(p_k)}{K'_2(p_k)}$, $K'_2(p_k) = \left. \frac{dK_2(p)}{dp} \right|_{p=p_k}$;

p_k — корни уравнения $K_2(p) = 0$.

Сумме экспонент импульсной переходной характеристики $h(t)$ соответствует, как нетрудно видеть, сумма рекуррентных уравнений для получения значений моделируемого процесса $\xi(t)$:

$$\xi[n] = \sum_{k=1}^m \xi_k[n], \quad (2.77)$$

$$\xi_k[n] = \rho_k \xi_k[n-1] + \Delta \xi_k[n], \quad \rho_k = e^{p_k \Delta t};$$

$\|\Delta \xi_k[n]\| k = \overline{1, m}$ — последовательность независимых (при различных n) случайных m -мерных векторов с коррелированными координатами $\Delta \xi_{1l}[n], \Delta \xi_{2l}[n], \dots, \Delta \xi_{ml}[n]$. Элементы корреляционной матрицы вектора $\|\Delta \xi_k[n]\| k = \overline{1, m}$ имеют вид

$$\begin{aligned} R_{ki} &= M \{ \Delta \xi_k[n] \Delta \xi_i[n] \} = \int_0^{\Delta t} C_k e^{p_k t} C_i e^{p_i t} dt = \\ &= C_k C_i \frac{1 - \rho_k \rho_i}{\rho_k + \rho_i}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Формула (2.77) является простым обобщением формулы (2.72). Для формирования векторов с коррелированными составляющими можно использовать методы, описанные в первой главе. Так, например, в трехмерном случае, используя для формирования случайных векторов метод линейного преобразования вектора $\|x_h[n]\| k = \overline{1, 3}$ с независимыми случайными координатами $x_{hk}[n]$, согласно соотношениям (1.19), (1.20) получим следующий алгоритм:

$$\Delta \xi_1 [n] = a_{11} x_1 [n],$$

$$\Delta \xi_2 [n] = a_{21} x_1 [n] + a_{22} x_2 [n],$$

$$\Delta \xi_3 [n] = a_{31} x_1 [n] + a_{32} x_2 [n] + a_{33} x_3 [n],$$

где

$$a_{11} = \sqrt{R_{11}}, \quad a_{21} = R_{12}/\sqrt{R_{11}}, \quad a_{22} = \sqrt{R_{22} - R_{12}^2/R_{11}},$$

$$a_{31} = R_{13}/\sqrt{R_{11}}, \quad a_{32} = \frac{R_{23} - R_{12}R_{13}/R_{11}}{\sqrt{R_{22} - R_{12}^2/R_{11}}},$$

$$a_{33} = \sqrt{R_{33} - \frac{R_{13}^2}{R_{11}} - \frac{(R_{23} - R_{12}R_{13}/R_{11})^2}{R_{22} - R_{12}^2/R_{11}}};$$

$\| R_{ki} \|$ $\begin{matrix} i = \overline{1,3} \\ k = \overline{1,3} \end{matrix}$ — корреляционная матрица с элементами,

вычисляемыми по формуле (2.78); $x_k [n]$ — трехмерная выборка независимых случайных чисел с параметрами (0,1).

Рассмотрим теперь случай, когда корни передаточной функции непрерывного формирующего фильтра простые, но не обязательно вещественные. Тогда импульсная переходная характеристика фильтра также будет являться суммой экспонент вида (2.76), но эти экспоненты либо частично, либо полностью будут комплексными. При вещественной импульсной переходной характеристике $h(t)$ комплексные экспоненты будут попарно сопряженными, так что можно записать

$$h(t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m_1/2} C_k e^{p_k t} + \sum_{k=m_1+1}^m C_k e^{p_k t},$$

где m_1 — число комплексных корней; $p_k, k = \overline{1, m_1}$ — комплексные корни; $p_k, k = \overline{m_1+1, m}$ — действительные корни.

В этом случае по аналогии с рассмотренными выше примерами нетрудно прийти к следующему рекуррентному алгоритму формирования дискретных значений шума на выходе непрерывного формирующего фильтра:

$$\xi [n] = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m_1/2} \xi_k [n] + \sum_{k=m_1+1}^m \xi_k [n], \quad (2.79)$$

где

$$\xi_k [n] = \rho_k \xi_k [n-1] + \Delta \xi_{2k-1} [n] + j \Delta \xi_{2k}, \quad k = \overline{1, m_1/2};$$

$$\xi_k [n] = \rho_k \xi_k [n-1] + \Delta \xi_k [n], \quad k = \overline{m_1+1, m};$$

$$\rho_k = e^{\rho_k \Delta t}, \quad k = \overline{1, m};$$

$\|\Delta \xi_k [n]\|$ $k = \overline{1, m}$ — последовательность независимых между собой m -мерных нормальных случайных векторов с коррелированными координатами $\Delta \xi_k [n]$.

Элементы корреляционной матрицы вектора $\|\Delta \xi_k [n]\|$ имеют вид

$$R_{ki} = M \{\Delta \xi_k \Delta \xi_i\} = \int_0^{\Delta t} h'_k (t) h'_i (t) dt, \quad (2.80)$$

где

$$h'_{2k-1} (t) = \operatorname{Re} h_k (t), \quad h'_{2k} (t) = \operatorname{Im} h_k (t), \quad k = \overline{1, m_1/2};$$

$$h_k (t) = C_k e^{\rho_k t}.$$

Алгоритм (2.77) отличается от алгоритма (2.79) тем, что некоторые рекуррентные последовательности $\xi_k [n]$ последнего являются комплексными.

Пример 3. Рассмотрим процесс дискретизации непрерывного формирующего фильтра, у которого передаточная функция

$$K(p) = \frac{A_0 + A_1 p}{B_0 + B_1 p + B_2 p^2}$$

имеет два комплексно-сопряженных корня:

$$p_1 = p_2^* = \frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4B_0 B_2}}{2B_2} = \alpha + j\beta,$$

где

$$B_1 - 4B_0 B_2 < 0.$$

Импульсная переходная характеристика фильтра имеет вид

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = C_1 e^{\rho_1 t} + C_1^* e^{\rho_2^* t} =$$

$$= 2 \operatorname{Re} C_1 e^{\rho_1 t} = 2 \operatorname{Re} C_1 e^{\alpha t + j(\beta t + \varphi)} = 2C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi), \quad t \geq 0,$$

где

$$C_1 = C_1^* = \frac{A_0 + A_1 p_1}{B_1 + 2B_2 p_1} = \alpha_0 + j\beta_0 = C e^{j\varphi},$$

$$C = |C_{1,2}| = \sqrt{\alpha_c^2 + \beta_c^2}, \quad \varphi = \arctg(\beta_c/\alpha_c).$$

Алгоритм для формирования значений случайного процесса $\xi(t)$ на выходе фильтра в соответствии с (2.79) сводится к одной рекуррентной формуле:

$$\xi[n] = 2 \operatorname{Re} \xi_1[n], \quad \xi_1[n] = \rho_1 \xi_1[n-1] + \Delta \xi_1[n] + j \Delta \xi_2[n],$$

где

$$\rho_1 = e^{P_1};$$

$\Delta \xi_1[n]$, $\Delta \xi_2[n]$ — координаты двумерного нормального случайного вектора с корреляционной матрицей [см. (2.80)]

$$\|R\| = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C^2 \int_0^{\Delta t} e^{2\alpha t} \cos^2(\beta t + \varphi) dt & C^2 \int_0^{\Delta t} e^{2\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \cos(\beta t + \varphi) dt \\ C^2 \int_0^{\Delta t} e^{2\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \cos(\beta t + \varphi) dt & C^2 \int_0^{\Delta t} e^{2\alpha t} \sin^2(\beta t + \varphi) dt \end{vmatrix}.$$

Интегралы в матрице $\|R\|$ в данном случае берутся. Это всегда будет иметь место для случайных процессов с рациональным спектром. Вычислив значения корреляционных моментов и используя формулы (1.12), (1.14) для формирования двумерного случайного вектора, получим

$$\begin{aligned} \Delta \xi_1[n] &= \sqrt{R_{11}} x_1[n], \quad \Delta \xi_2[n] = \\ &= \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}}} x_1[n] + \sqrt{R_{22} - \frac{R_{12}^2}{R_{11}}} x_2[n], \end{aligned}$$

где $x_1[n]$, $x_2[n]$ — последовательности независимых нормальных случайных чисел с параметрами (0, 1).

Аналогичные соотношения получаются при дискретизации формирующих фильтров более высокого порядка.

Из рассмотренного примера следует, что подготовительная работа при данном методе моделирования сравнительно простая. Достоинствами получаемых алгоритмов, кроме их простоты, являются отсутствие методической погрешности при любом шаге дискретизации и возможность выразить параметры алгоритмов в конечном аналитическом виде через параметры передаточной

функции формирующего фильтра любого порядка, лишь бы полюсы передаточной функции были простыми и точно известными.

При наличии кратных полюсов у передаточной функции формирующего фильтра также можно найти рекуррентные моделирующие алгоритмы для формирования стационарных нормальных случайных процессов, несколько изменив используемый выше метод дискретизации. Однако при этом получаются более громоздкие выражения и не столь эффективные алгоритмы. Этот случай мы рассматривать не будем.

Довольно просто можно получить рекуррентные алгоритмы моделирования стационарных нормальных случайных процессов с рациональным спектром, если использовать приближенные методы дискретизации формирующих фильтров. Эти методы дискретизации рассмотрены в третьей главе. Они разработаны для линейных систем любого порядка и для случаев, когда полюсы передаточной функции известны, но не обязательно простые, и когда полюсы неизвестны.

2.4. Моделирование стационарных нормальных случайных процессов в неравноотстоящих точках

Одной из особенностей рассмотренных в предыдущем параграфе рекуррентных алгоритмов, основанных на дискретизации непрерывных формирующих фильтров, является то, что они весьма удобны для моделирования стационарных случайных процессов с переменным шагом (в неравноотстоящих точках).

Действительно, из принципа построения этих алгоритмов видно, что для получения очередного значения процесса, отстоящего от предыдущего значения на произвольную величину Δt , достаточно найти коэффициенты $\rho_k = e^{p_k \Delta t}$, где p_k — полюсы передаточной функции формирующего фильтра, и сформировать случайный вектор $\|\Delta \xi_k\|$ $k=1, m$, с корреляционной матрицей, определяемой коэффициентами ρ_k [см. формулы (2.78), (2.80)], т. е. достаточно сделать параметры рекуррентных алгоритмов переменными. В остальном процедура формирования случайного процесса остается такой же, как и при постоянном шаге. Поскольку параметры алгоритмов удается

выразить через параметры формирующего фильтра и шаг Δt в виде формулы, то пересчет параметров, необходимый для моделирования случайных процессов с переменным шагом, осуществляется довольно просто.

Следует отметить, что данный метод моделирования *не имеет методической погрешности* как при постоянном, так и при переменном шаге дискретизации, в отличие от приближенных алгоритмов для моделирования случайных процессов с переменным шагом, которые можно получить путем замены постоянных параметров в алгоритмах, основанных на факторизации (§ 2.3), соответствующими переменными параметрами [57].

Пример 1. Рассмотрим моделирование с переменным шагом случайного процесса $\xi(t)$ с экспоненциальной корреляционной функцией (2.68). Пусть t_n — последовательность точек, в которых должны формироваться значения случайного процесса $\xi(t)$. Заменяя в алгоритме (2.74) постоянный параметр $\rho = e^{-\omega_s \Delta t}$ переменным параметром ρ_n , получим следующий моделирующий алгоритм:

$$\xi(t_n) = \rho_n \xi(t_{n-1}) + \sqrt{1 - \rho_n^2} x[n],$$

где

$$\rho_n = e^{-\omega_s \Delta t_n} = e^{-\omega_s (t_n - t_{n-1})};$$

$x[n]$ — последовательность независимых нормальных случайных чисел с параметрами (0, 1).

Как уже отмечалось, для получения значений случайных процессов в неравноотстоящих точках могут быть использованы рассмотренные в первой главе методы формирования реализаций случайных векторов, но эти методы по своей эффективности существенно уступают рекуррентным методам.

2.5. Сравнительная характеристика методов моделирования стационарных нормальных случайных процессов

Выше были рассмотрены различные методы моделирования стационарных нормальных случайных процессов и различные пути проведения подготовительной работы при получении параметров моделирующих алгоритмов. Каждый из этих методов имеет свои достоинства и недостатки, свои области наиболее эффективного применения.

Ниже дается сравнительная характеристика этих методов, цель которой — облегчить исследователю выбор метода моделирования, соответствующего его задаче.

Метод скользящего суммирования является универсальным методом, пригодным для моделирования случайных процессов с рациональным и нерациональным спектром. Это, вообще говоря, приближенный метод, причем методическая погрешность может быть сделана сколь угодно малой, однако последнее достигается путем увеличения числа слагаемых в формуле скользящего суммирования, что уменьшает быстродействие.

Если моделируемый процесс задан своей корреляционной функцией, а энергетический спектр процесса неизвестен, причем вычисление его путем Фурье-преобразования корреляционной функции затруднительно, то получение весовых коэффициентов в алгоритме скользящего суммирования целесообразно производить путем решения нелинейной алгебраической системы уравнений на ЦВМ (§ 2.2, п. 1).

Если моделируемый процесс задан своим энергетическим спектром (аналитически или же в виде экспериментально снятой кривой), а также в случаях, когда энергетический спектр легко находится по заданной корреляционной функции, получение весовых коэффициентов рекомендуется производить более простым путем — методом разложения в ряд Фурье, описанным в § 2.2, п. 2. При разложении в ряд Фурье могут быть использованы как аналитические, так и численные методы, реализуемые на ЦВМ. В последнем случае для сокращения объема вычислений можно применять алгоритм так называемого быстрого преобразования Фурье, предложенный Кули и Таки [100].

Получение весовых коэффициентов методом факторизации (§ 2.2, п. 3) целесообразно лишь в случаях, когда моделируемый процесс является процессом с рациональным спектром, однако следует иметь в виду, что в этих случаях обычно более эффективно применение рекуррентных алгоритмов.

Наиболее просто весовые коэффициенты в формуле скользящего суммирования находятся в тех случаях, когда известно, что моделируемый процесс является результатом воздействия белого шума на линейный фильтр с заданной импульсной переходной характеристикой (§ 2.2, п. 4).

Стационарные нормальные случайные процессы с рациональным спектром невысокого порядка целесообраз-

но моделировать с помощью рекуррентных алгоритмов, которые наиболее экономичны по количеству элементарных операций и ячеек памяти и не обладают методической погрешностью.

Описанные в § 2.3 два метода получения параметров рекуррентных алгоритмов по заданной корреляционной функции или энергетическому спектру моделируемого процесса по трудоемкости примерно одинаковы. Однако последний из них предпочтительнее, если нормальный случайный процесс требуется моделировать не в равноотстоящих точках.

В заключение заметим, что методы моделирования нормальных случайных процессов продолжают совершенствоваться. Например, в работах [1, 66] рассматривается несколько иной подход к моделированию нормальных случайных процессов. Поэтому приведенные здесь рекомендации по моделированию случайных процессов не являются исчерпывающими и в дальнейшем, когда накопится более богатый опыт моделирования, могут быть дополнены. Некоторые дополнительные рекомендации по моделированию нормальных случайных процессов даны в следующем параграфе.

2.6. Алгоритмы для цифрового моделирования стационарных нормальных случайных процессов с часто встречающимися типами корреляционных функций

Выше были описаны различные методы моделирования случайных процессов, где рассматривалась в основном принципиальная сторона вопроса. В данном параграфе приводятся результаты применения этих методов для моделирования стационарных нормальных процессов с распространенными типами корреляционных функций. При этом проделана вся необходимая подготовительная работа и получены простые моделирующие алгоритмы, пригодные для непосредственного использования. Кроме того, даны примеры практической реализации моделирующих алгоритмов.

В табл. 2.2 даны типы корреляционных функций и энергетических спектров моделируемых процессов и соответствующие им алгоритмы. Ниже даются необходимые пояснения.

№ по
порядку

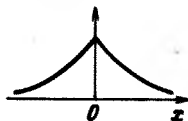
Корреляционная функция $R(\tau)$

Аналитическое выражение

График

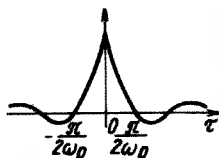
1

$$\sigma^2 e^{-\omega_* |\tau|}$$



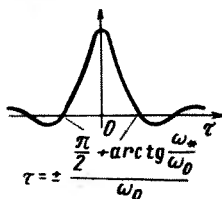
2

$$\sigma^2 e^{-\omega_* |\tau|} \cos \omega_0 \tau$$



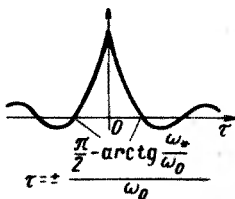
3

$$\sigma^2 e^{-\omega_* |\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\omega_*}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$



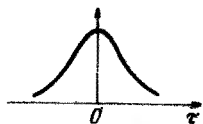
4

$$\sigma^2 e^{-\omega_* |\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\omega_*}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$



5

$$\sigma^2 e^{-\omega_* |\tau|} (1 + \omega_* |\tau|)$$



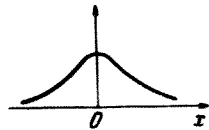
Энергетический спектр $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$

Аналитическое выражение

График

$$\frac{2\sigma^2}{\omega_0} \frac{1}{1+x^2},$$

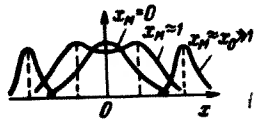
$$x = \omega/\omega_0$$



$$\frac{2\sigma^2}{\omega_0} \frac{1+x^2+x_0^2}{[1+(x+x_0)^2][1+(x-x_0)^2]},$$

$$x = \omega/\omega_0, x_0 = \omega_0/\omega_0,$$

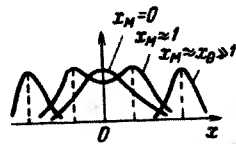
$$x_M = \sqrt{2x_0 \sqrt{1+x_0^2} - (1+x_0^2)}$$



$$\frac{4\sigma^2}{\omega_0} \frac{1+x^2}{[1+(x+x_0)^2][1+(x-x_0)^2]},$$

$$x = \omega/\omega_0, x_0 = \omega_0/\omega_0,$$

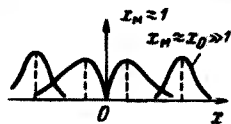
$$x_M = \sqrt{x_0^2 - 1}$$



$$\frac{4\sigma^2}{\omega_0} \frac{x^2}{[1+(x+x_0)^2][1+(x-x_0)^2]},$$

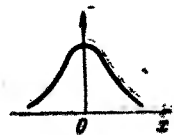
$$x = \omega/\omega_0, x_0 = \omega_0/\omega_0,$$

$$x_M = \sqrt{x_0^2 + 1}$$



$$\frac{4\sigma^2}{\omega_0} \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$x = \omega/\omega_0$$



№ по порядку	Корреляционная функция $R(\tau)$	
	Аналитическое выражение	График
6	$\sigma^2 \frac{\sin \omega_* \tau}{\omega_* \tau}$	
7	$\sigma^2 e^{-\omega_*^2 \tau^2}$	
8	$\frac{\sigma^2}{1 + \omega_*^2 \tau^2}$	
9	$\begin{cases} \sigma^2 (1 - \omega_* \tau), & \tau \leq 1/\omega_* \\ 0, & \tau > 1/\omega_* \end{cases}$	

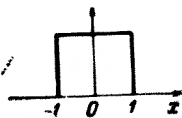
Примечание. В графе (3) $x_{\text{н}}$ — это те значения x , при которых

$$\text{Энергетический спектр } G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

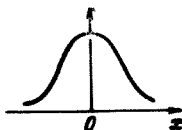
Аналитическое выражение

График

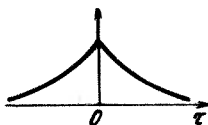
$$\begin{cases} \frac{\pi\sigma^2}{\omega_*}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad x = \frac{\omega}{\omega_*}$$



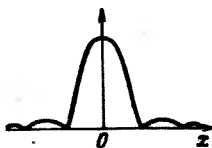
$$\frac{\sqrt{\pi}\sigma^2}{\omega_*} e^{-x^2/4}, \quad x = \omega/\omega_*$$



$$\frac{\pi\sigma^2}{\omega_*} e^{-|x|}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_*}$$



$$\frac{4\sigma^2}{\omega_*} \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_*}$$



$$\frac{dG(\omega)}{d\omega} = 0.$$

№ по- рядку	Моделирующий алгоритм	Параметры алгоритма
1	$\xi [n] = a_0 x [n] + b_1 \xi [n-1]$	$a_0 = \sigma \sqrt{1 - \rho^2}; b_1 = \rho; \rho \equiv e^{-\gamma_*},$ $\gamma_* = \omega_* \Delta t$
2	$\xi [n] = a_0 x [n] + a_1 x [n-1] + b_1 \xi [n-1] + b_2 \xi [n-2]$	$a_0 = \sigma \alpha = \sigma \sqrt{(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \sigma \alpha_0 / \alpha;$ $b_1 = 2\rho \cos \gamma_0; b_2 = -\rho^2; \alpha_0 = \rho (\rho^2 - 1) \cos \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - \rho^4; \rho = e^{-\gamma_*}, \gamma_* = \omega_* \Delta t, \gamma_0 = \omega_0 \Delta t$
3		$\alpha_0 = \sigma \alpha = \sigma \sqrt{(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \sigma \alpha_0 / \alpha;$ $b_1 = 2\rho \cos \gamma_0; b_2 = -\rho^2; \alpha_0 = \rho (\rho^2 - 1) \cos \gamma_0 + \frac{\omega_*}{\omega_0} (1 + \rho^2) \rho \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - \rho^4 - 4\rho^2 \frac{\omega_*}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0;$ $\rho = e^{-\gamma_*}, \gamma_* = \omega_* \Delta t, \gamma_0 = \omega_0 \Delta t$
4		$a_0 = \sigma \alpha = \sigma \sqrt{(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \sigma \alpha_0 / \alpha;$ $b_1 = 2\rho \cos \gamma_0; b_2 = -\rho^2; \alpha_0 = \rho (\rho^2 - 1) \cos \gamma_0 - \frac{\omega_*}{\omega_0} (1 + \rho^2) \rho \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - \rho^4 + 4\rho^2 \frac{\omega_*}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0;$ $\rho = e^{-\gamma_*}, \gamma_* = \omega_* \Delta t, \gamma_0 = \omega_0 \Delta t.$
5	$a_0 = \sigma \alpha = \sigma \sqrt{(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2};$ $a_1 = \sigma \alpha_0 / \alpha; b_1 = 2\rho; b_2 = -\rho^2;$ $\alpha_0 = \rho (1 + \gamma_*) - \rho (1 - \gamma_*); \alpha_1 = 1 - 4\rho^2 \gamma_* - \rho^4;$ $\rho = e^{-\gamma_*}; \gamma_* = \omega_* \Delta t$	

№ по по- рядку	Моделирующий алгоритм	Параметры алгоритма
6		$c_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi\gamma_*}} \frac{\sin \gamma_* k}{k}, \quad \gamma_* \leq \pi;$ $\gamma_* = \omega_* \Delta t$
7	$\xi[n] = \sum_{-p}^p c_k x[n-k]$	$c_k = \frac{\sigma \sqrt{2\gamma_*}}{\sqrt{4/\pi}} e^{-2\gamma_*^2 k^2}, \quad \gamma_* \leq 1/2;$ $\gamma_* = \omega_* \Delta t.$
8		$c_k = 2\sigma \sqrt{\frac{\gamma_*}{\pi}} \frac{1}{1+4\gamma_*^2 k^2}, \quad \gamma_* \leq 1/2;$ $\gamma_* = \omega_* \Delta t$
9	$\xi[n] = c_0 \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$	$c_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}; \quad N = \left[\frac{1}{\gamma_* \Delta t} \right] + 1;$ $\left[\frac{1}{\gamma_*} \right] - \text{целая часть числа } \frac{1}{\gamma_*}, \quad \gamma_* = \omega_* \Delta t.$

Заданный стационарный нормальный непрерывный случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R(\tau)$ изображается на ЦВМ в виде дискретной последовательности его значений, относящихся ко времени $t_n = n\Delta t$, где Δt — шаг дискретизации, n — целочисленный аргумент. Все рассмотренные здесь алгоритмы предназначены для получения на ЦВМ дискретных, неограниченных во времени реализаций $\xi[n] = \xi(n\Delta t)$ моделируемого случайного процесса $\xi(t)$. Во все эти алгоритмы заложен принцип преобразования последовательности $x[n]$ независимых нормально распределенных случайных чисел с параметрами $(0, 1)$ (дискретный белый шум) в последовательность $\xi[n]$, коррелированную по закону

$$R[n] = M\{\xi[k]\xi[k+n]\} = R(n\Delta t).$$

Случайные процессы с корреляционными функциями, помещенными в таблице под № 1—5, относятся к классу случайных процессов с рациональной спектральной плотностью. Для моделирования таких процессов наиболее удобным является применение разностных уравнений (§ 2.3), что приводит к алгоритмам, не имеющим методической погрешности и сводящимся к простым рекуррентным соотношениям. Алгоритмы № 1—5 получены этим способом.

Алгоритмы № 1 и 2 для моделирования процессов с экспоненциальной и экспоненциально-косинусной корреляционными функциями уже рассматривались в § 2.3 и пояснений не требуют.

Алгоритмы № 2—5 одинаковы и отличаются лишь значениями параметров a_0, a_1, b_1, b_2 , нахождение которых в каждом конкретном случае сводится к вычислениям по формулам, приведенным в табл. 2.2. При выводе выражений для вычисления параметров рекуррентных формул в алгоритмах № 3—5 использовались преобразования, рассмотренные в § 2.3 на примере экспоненциально-косинусной корреляционной функции: спектральная плотность $F(z)$ последовательности $\xi[n]$ для каждого типа корреляционной функции записывалась согласно (2.51), суммирование соответствующих бесконечных в обе стороны рядов осуществлялось по таблицам односторонних дискретных преобразований Лапласа [85], а факторизация числителей полученных дробно-рациональных спектральных функций производи-

лась путем разложения полиномов $A'(z)$ на множители (полиномы имели порядок не выше второго) с последующим использованием корней полиномов согласно выражениям (2.61) и (2.62). Знаменатели спектральных функций оказывались автоматически факторизованными.

Для моделирования случайных процессов № 6—8, которые не относятся к классу процессов с рациональной спектральной плотностью, был применен метод скользящего суммирования как наиболее эффективный в данном случае.

Согласно алгоритмам № 6—8 последовательность $\xi[n]$ получается методом скользящего суммирования последовательности $x[n]$ с весом c_k . Выражения для весовых коэффициентов были получены путем интегрирования энергетических спектров процессов по формуле (2.12). При этом полагалось, что частота дискретизации для случайного процесса № 6 [процесс с равномерным в полосе $(-\omega_*, \omega_*)$ спектром] больше или равна ω_* . Относительно процессов № 7, 8 предполагалось, что частота дискретизации достаточно велика, так что верхний предел в интеграле (2.12) можно принять равным бесконечности. Поэтому выражения для коэффициентов c_k в алгоритмах № 7, 8 следует применять при $\gamma_* = \omega_* \Delta t \leq 0,5$. Замена конечного предела бесконечным позволила в данном случае свести интегралы типа (2.12) к табличным [25].

Алгоритмы № 6—8 являются приближенными, однако при увеличении параметра p методическая погрешность может быть сделана пренебрежимо малой. При выбранных значениях γ_* и p погрешность метода легко оценивается путем свертки весовых коэффициентов. Пример вычисления коэффициентов c_k и расчета погрешности метода для случайного процесса с корреляционной функцией № 8 был приведен ранее в § 2.2. В этом же параграфе дано описание алгоритма для моделирования случайного процесса № 9 [см. алгоритм (2.48)].

Алгоритмы, приведенные в табл. 2.2, были подвергнуты практической проверке. Проверка производилась путем выработки на ЦВМ реализаций моделируемых случайных процессов длиной в 1 000 дискрет при $\sigma=1$ и при заданных значениях параметров γ_* и γ_0 . По этим реализациям вычислялись выборочные корреляционные функции, которые сравнивались с заданными корреляци-

онными функциями. Исходные независимые случайные числа $x[n]$ вырабатывались по стандартной программе датчика нормальных случайных чисел для ЦВМ М-20.

При выработке начальных значений $\xi[0]$ реализаций случайных процессов № 1—5 в качестве $\xi[-1]$, $\xi[-2]$ брались выборочные значения независимых нормальных случайных чисел с параметрами (0, 1).

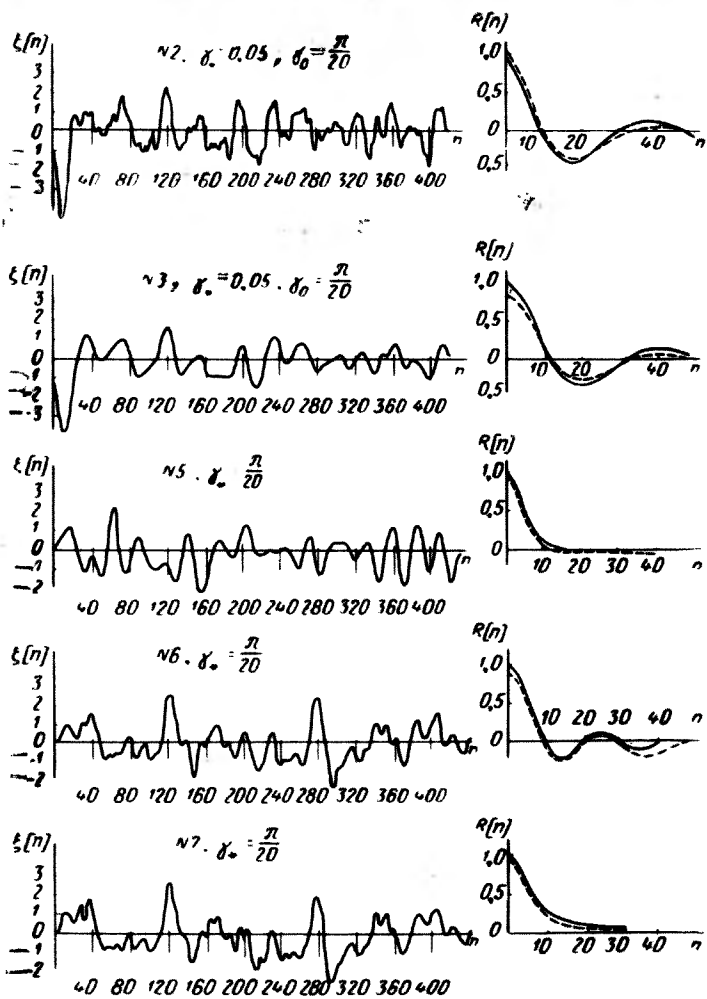


Рис. 2.5.

На рис. 2.5 показаны начальные участки реализаций длиной в 400 дискрет некоторых случайных процессов из табл. 2.2; для удобства реализации изображены непрерывной линией. Рядом с реализациями изображены заданные корреляционные функции (сплошная линия) вместе с корреляционными функциями, вычисленными на ЦВМ по этим реализациям (пунктир). Графики помечены теми же номерами, что и корреляционные функции в табл. 2.2. Значения параметров γ_* и γ_0 выбраны так, чтобы интервалы корреляции у всех моделируемых процессов были примерно одинаковыми. Из рисунка видно хорошее совпадение заданных и выборочных корреляционных функций.

Случайный процесс с корреляционной функцией № 2 недифференцируемый, поэтому его реализации имеют не такой гладкий характер, как остальные четыре реализации дифференцируемых случайных процессов.

Между реализациями № 2 и 3, а также между реализациями № 6, 7 можно заметить определенное сходство, которое объясняется тем, что реализации формировались на ЦВМ путем преобразования одной и той же дискретной реализации белого шума.

В начале реализаций № 2, 3 видны довольно большие отрицательные выбросы. Эти выбросы являются результатом искажения начальных участков моделируемых процессов из-за переходного процесса. Действительно, начальные условия выбраны так, что только случайные процессы № 1 и № 5—9 являются с самого начала стационарными.

Для того чтобы избавиться от переходного процесса при моделировании случайных процессов № 2—4, нужно при вычислении их начальных значений $\xi[0]$ в качестве $x[0]=v_1$, $x[-1]=v_2$, $\xi[-1]=v_3$, $\xi[-2]=v_4$ вместо независимых случайных чисел, как это было принято выше, взять четырехмерный случайный вектор $\|v_k\|$ $k=\overline{1,4}$ с корреляционной матрицей

$$\|R_{ki}\| \begin{matrix} i = \overline{1,4} \\ k = \overline{1,4} \end{matrix} = \|M\{v_k v_i\}\| \begin{matrix} i = \overline{1,4} \\ k = \overline{1,4} \end{matrix} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 & R[1] \\ 0 & a_0 & R[1] & 1 \end{array} \right\|.$$

Элементы этой матрицы легко находятся, если в соотношении $M\{v_k v_i\}$ выразить $v_3 = \xi[-1]$ и $v_4 = \xi[-2]$ в соответствии с рекуррентными алгоритмами № 2—5 и учесть, что $x[n]$ — последовательность некоррелированных случайных величин, а $\xi[n]$ — последовательность случайных величин с заданной корреляционной функцией $R[n]$.

Рассмотренный прием нетрудно распространить на рекуррентные алгоритмы более высокого порядка.

В заключение укажем на некоторые приемы, позволяющие расширить класс моделируемых стационарных нормальных случайных процессов путем несложных преобразований рассмотренных выше алгоритмов.

Известно, например, что при суммировании нескольких независимых стационарных нормальных случайных процессов образуется стационарный нормальный случайный процесс, корреляционная функция которого равна сумме корреляционных функций слагаемых. Отсюда, если корреляционная функция процесса является суммой двух или более корреляционных функций из табл. 2.2, то дискретные реализации этого процесса можно формировать путем суммирования двух или более независимых реализаций, получаемых по приведенным алгоритмам. Если, например, корреляционная функция моделируемого процесса имеет вид

$$R(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau) = \sigma_1^2 e^{-\omega_{\omega_1} |\tau|} \cos \omega_{\omega_1} \tau + \\ + \sigma_2^2 e^{-\omega_{\omega_2} |\tau|} \cos \omega_{\omega_2} \tau,$$

то алгоритм для формирования его дискретных реализаций запишется в виде

$$\xi[n] = \xi_1[n] + \xi_2[n], \quad (2.81)$$

где

$$\xi_1[n] = \sigma_1 a_{01} x_1[n] + \sigma_1 a_{11} x_1[n-1] - b_{11} \xi_1[n-1] - \\ - b_{21} \xi_1[n-2];$$

$$\xi_2[n] = \sigma_2 a_{02} x_2[n] + \sigma_2 a_{12} x_2[n-1] - b_{12} \xi_2[n-1] - \\ - b_{22} \xi_2[n-2];$$

$x_1[n]$, $x_2[n]$ — независимые между собой последовательности независимых нормальных случайных чисел с параметрами $(0, 1)$.

Параметры алгоритмов (2.81) находятся по формулам, приведенным в табл. 2.2 для алгоритма № 2, при $\gamma_{*1} = \omega_{*1}\Delta t$, $\gamma_{*2} = \omega_{*2}\Delta t$, $\gamma_{01} = \omega_{01}\Delta t$, $\gamma_{02} = \omega_{02}\Delta t$.

Рассмотрим еще один прием преобразования. Из теории случайных процессов (см., например, [78]) известна следующая теорема. Если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два одинаковых стационарных нормальных центрированных и независимых случайных процесса с корреляционными функциями $R'(\tau)$, то случайный процесс

$$\xi(t) = \xi_1(t) \sin \omega t + \xi_2(t) \cos \omega t \quad (2.82)$$

будет также стационарным нормальным центрированным случайным процессом, но с корреляционной функцией

$$R(\tau) = R'(\tau) \cos \omega \tau. \quad (2.83)$$

Этот факт позволяет легко моделировать нормальные случайные процессы с корреляционной функцией вида (2.83), если известен алгоритм для моделирования нормального случайного процесса с корреляционной функцией $R'(\tau)$. Для этого в соответствии с формулой (2.82) нужно выработать дискретные реализации $\xi_1[n]$ и $\xi_2[n]$ независимых случайных процессов с корреляционной функцией $R'(\tau)$ (например, с помощью алгоритмов, приведенных в табл. 2.2), затем по правилу

$$\xi[n] = \xi_1[n] \sin \gamma n + \xi_2[n] \cos \gamma n, \quad (2.84)$$

где $\gamma = \omega \Delta t$, преобразовать реализации $\xi_1[n]$ и $\xi_2[n]$ в реализацию $\xi[n]$ случайного процесса с корреляционной функцией (2.83).

Для вычисления дискретных тригонометрических функций $s[n] = \sin \gamma n$ и $c[n] = \cos \gamma n$ целесообразно воспользоваться рекуррентным алгоритмом (1.3), тогда алгоритм (2.84) запишется в виде

$$\begin{aligned} \xi[n] = & \xi_1[n] (c[1] s[n-1] + s[1] c[n-1]) + \\ & + \xi_2[n] (c[1] c[n-1] - s[1] s[n-1]). \end{aligned}$$

2.7. Моделирование ненормальных стационарных случайных процессов

Ненормальный случайный процесс задается обычно своим многомерным распределением или конструктивно в виде некоторого преобразования от случайных параметров и детерминированных функций. В последнем слу-

чае вероятностный процесс согласно классификации, данной в § 1.1, является параметрически заданным и моделирование его сводится к формированию реализаций случайных параметров с последующим их преобразованием.

Задача моделирования усложняется, если ненормальный процесс задан многомерным законом распределения. При небольшом числе дискретных точек эту задачу можно решить как задачу формирования реализаций случайного вектора по заданному многомерному распределению (см. § 1.5), применяя классический универсальный способ, основанный на использовании условных плотностей вероятностей, или многомерный метод Неймана. Однако при формировании реализаций большой длины практическое значение этих способов существенно ограничено.

В этом и следующем параграфах рассматривается более узкая задача моделирования ненормальных стационарных случайных процессов, а именно моделирование процессов по их одновременно заданным корреляционным функциям и одномерным законам распределения: Эта задача сравнительно просто решается путем специально подобранных нелинейных преобразований соответствующих нормальных стационарных случайных процессов.

В общем случае для получения случайного процесса с заданным одномерным законом распределения и заданной корреляционной функцией можно использовать следующий способ [52].

Пусть в качестве исходного выбран нормальный стационарный случайный процесс $\xi_0(t)$. Как известно, всегда существует такое нелинейное безынерционное преобразование $y=f(x)$, которое превращает нормальную функцию плотности $w_0(x)$ процесса $\xi_0(t)$ в заданную функцию плотности $w(y)$. Если исходный процесс $\xi_0(t)$ имеет корреляционную функцию $R_0(\tau)$, то преобразованный процесс $\xi(t)$ будет иметь корреляционную функцию $R(\tau)$, отличающуюся от функции $R_0(\tau)$ и связанную с ней некоторой зависимостью

$$R = \Phi(R_0).$$

Вид этой зависимости определяется преобразованием $y=f(x)$. Для того чтобы корреляционная функция пре-

образованного процесса была требуемой, нужно выбрать корреляционную функцию исходного процесса равной

$$R_0 = \varphi^{-1}(R),$$

где $\varphi^{-1}(R)$ — функция, обратная функции $\varphi(R_0)$.

Таким образом, при использовании этого способа подготовительная работа состоит из следующих этапов: 1) нахождение по заданной функции плотности $\omega(x)$ преобразования $y=f(x)$, 2) получение по найденной функции $y=f(x)$ зависимости $R=\varphi(R_0)$, 3) решение уравнения $R=\varphi(R_0)$ относительно R_0 , т. е. определение корреляционной функции $R_0(\tau)$ исходного нормального случайного процесса $\xi_0(t)$, 4) отыскание алгоритма для моделирования нормального процесса $\xi_0(t)$ с корреляционной функцией $R_0(\tau)$. После того как подготовительная работа закончена, моделирование случайного процесса с требуемыми характеристиками сводится к формированию дискретных реализаций $\xi_0[n]$ нормального случайного процесса $\xi_0(t)$ и преобразованию этих реализаций по формуле

$$\xi[n] = f\{\xi_0[n]\}.$$

Для простоты выберем преобразование $y=f(x)$ монотонным и положим, что моделируемый и исходный процессы имеют параметры $(0, 1)$, так что $R(\tau)=r(\tau)$, $R_0(\tau)=r_0(\tau)$.

1. Функция $y=f(x)$ должна удовлетворять очевидному равенству

$$W[f(x)] = W_0(x) = \Phi(x), \quad (2.85)$$

где $W(y)$ и $W_0(x)$ — интегральные законы распределения случайных процессов $\xi(t)$ и $\xi_0(t)$ соответственно; $\Phi(x) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ — интеграл вероятностей (функция Лапласа).

Уравнению (2.85) соответствует нелинейное дифференциальное уравнение, связывающее функции $f(x)$ и $\omega(x)$:

$$\omega[f(x)] \frac{df(x)}{dx} = \omega_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (2.86)$$

Уравнения (2.85) и (2.86) в редких случаях удается решить аналитически. Для получения преобразования $y=f(x)$ можно использовать численное решение уравнения (2.85) на ЦВМ. Для этого нормальную функцию плотности с параметрами (0, 1) следует заменить усеченной функцией, ограничив интервал возможных значений аргумента x в (2.85) некоторыми пределами ($-x_c, x_c$), вероятность выхода за которые пренебрежимо мала, например взяв $x_c=4$. Задавшись дискретными значениями x_k аргумента x из интервала ($-x_c, x_c$), для получения таблицы значений $y_k=f(x_k)$ искомой функции нужно для каждого x_k подобрать такой y_k , чтобы

$$W(y_k) = \Phi(x_k).$$

Последнее можно сделать методом итераций.

2. При известном преобразовании $y=f(x)$ зависимость $r=\varphi(r_0)$ в соответствии с определением корреляционной функции как математического ожидания произведения $\xi(t)\xi(t+\tau) = \int \int \xi_0(t) \int \int \xi_0(t+\tau)$ имеет вид

$$r = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) \omega_0(x_1, x_2, r_0) dx_1 dx_2 = \\ = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-r_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) e^{-\frac{x_1^2 - 2r_0 x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-r_0^2)}} dx_1 dx_2, \quad (2.87)$$

где $\omega_0(x_1, x_2, r_0)$ — двумерная нормальная функция плотности вероятностей значений x_1 и x_2 исходного случайного процесса в сечениях, отстоящих друг от друга на величину τ , такую, что коэффициент корреляции между x_1 и x_2 равен r_0 .

Выражение (2.87) неудобно для дальнейшего использования, так как интеграл в нем часто не удается вычислить в конечном виде, к тому же функция $f(x)$ чаще всего будет задана в виде таблицы значений, получаемых на первом этапе. Более приемлемой формой задания функции $r=\varphi(r_0)$ является представление ее в виде ряда по степеням r_0 . Этот ряд нетрудно получить, если разложить двумерную функцию $\omega_0(x_1, x_2, r_0)$ в ряд по орто-

гональным полиномам Эрмита. Искомое разложение функции $\varphi(r_0)$ имеет вид [50]

$$r = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 \frac{r_0^m}{m!}, \quad (2.88)$$

где

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx; \quad (2.89)$$

$H_m(x)$ — полиномы Эрмита.

Для нахождения полиномов $H_m(x)$ существует рекуррентная формула

$$H_{m+1}(x) = xH_m(x) - mH_{m-1}(x),$$

причем первые три полинома таковы:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1.$$

Поскольку предполагается, что моделируемый процесс $\xi(t)$ имеет параметры $(0, 1)$, то в ряде (2.88) $c_2 = 0$ и

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2}{m!} = 1.$$

Для нахождения зависимости $r = \varphi(r_0)$ в общем случае нужно путем численного интегрирования выражения (2.89) на ЦВМ с использованием таблицы значений $y_k = f(x_k)$ найти коэффициенты c_m . При этом бесконечный ряд (2.88) приближенно заменяется конечным. В качестве номера m , на котором следует остановить процесс вычисления коэффициентов c_m , можно взять то значение $m = m_c$, когда впервые выполнится неравенство

$$\left| 1 - \sum_{k=1}^m \frac{c_k^2}{k!} \right| < \varepsilon,$$

где ε — достаточно малая величина, например $\varepsilon = 0,01$.

3. При известных коэффициентах c_m для получения коэффициента корреляции $r_0(\tau)$ исходного нормального случайного процесса нужно решить уравнение

$$r = \sum_{m=1}^{m_c} \frac{c_m^2}{m!} r_0^m$$

относительно r_0 . Численное решение этого уравнений с целью нахождения таблицы значений функции $r_0 = \varphi^{-1}(r)$ можно осуществить на ЦВМ методом итераций. По найденной зависимости $\varphi^{-1}(r)$ легко определяется корреляционная функция исходного процесса:

$$r_0(\tau) = \varphi^{-1}[r(\tau)].$$

Функция $r_0(\tau)$ ввиду численного решения уравнений для ее получения будет таблично заданной.

4. Для нахождения алгоритма, позволяющего формировать на ЦВМ дискретные реализации стационарного нормального процесса с корреляционной функцией $r_0(\tau)$, таблично заданную функцию $r_0(\tau)$ нужно аппроксимировать функцией вида (2.50)*, чтобы получить потом рекуррентный моделирующий алгоритм, или решить нелинейную систему типа (2.9) для моделирования исходного процесса путем скользящего суммирования. Можно использовать также алгоритм скользящего суммирования с весовой функцией, полученной путем разложения в ряд Фурье квадратного корня из спектральной функции исходного процесса $\xi_0(t)$, но для этого требуется найти преобразование Фурье от таблично заданной корреляционной функции $r_0(\tau)$.

Для проведения подготовительной работы в данном случае можно составить стандартную программу. Алгоритм этой программы следует из приведенных выше соотношений. Затруднение принципиального характера состоит в том, что в общем случае не представляется возможным доказать существование решения уравнения (2.88) относительно r_0 . В тех случаях, когда заданная корреляционная функция неотрицательна, решение уравнения (2.88) как легко видеть, всегда существует.

Ввиду того что подготовительная работа при данном способе моделирования ненормальных стационарных случайных процессов, вообще говоря, довольно трудоемкая, моделирование процессов с распространенными типами одномерных законов распределения целесообразно рассмотреть специально. Подготовительную работу для моделирования этих процессов, как показано в следующем параграфе, можно существенно упростить, если

*) Способ такой аппроксимации имеется в приложении к работе [56].

В конкретных случаях использовать особенности функции $r = \varphi(r_0)$ и применять несколько отличные от описанных нелинейные преобразования исходных нормальных случайных процессов, в частности одновременное нелинейное преобразование двух нормальных случайных процессов.

2.8. Моделирование стационарных случайных процессов с распространенными одномерными законами распределения

В этом параграфе рассматриваются возможные алгоритмы для моделирования на ЦВМ ненормальных стационарных случайных процессов с часто встречающимися одномерными законами распределения и заданными корреляционными функциями.

1. Случайный процесс с равномерным распределением

Пусть требуется формировать на ЦВМ дискретные реализации стационарного случайного процесса, равномерно распределенного в интервале $(-a, a)$ и имеющего корреляционную функцию

$$R(\tau) = \frac{a^2}{3} r(\tau), \quad (2.90)$$

где $r(\tau)$ — коэффициент корреляции процесса.

Для получения случайного процесса $\xi(t)$ с равномерным распределением из нормального случайного процесса $\xi_0(t)$ достаточно, как известно, подвергнуть последний нелинейному преобразованию с характеристикой нелинейности типа «сглаженный ограничитель». Точное выражение для функции $f(x)$ в случае, когда исходный нормальный процесс имеет параметры $(0, 1)$ и требуется получить равномерно распределенный в интервале $(-a, a)$ процесс, имеет вид

$$f(x) = 2a \left[\Phi(x) - \frac{1}{2} \right] = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2.91)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)$, получаемого с помощью преобразования (2.91), удается

выразить в замкнутой форме через корреляционную функцию $r_0(\tau)$ исходного нормального случайного процесса (см., например, [80], стр. 213—214):

$$R(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin \frac{r_0(\tau)}{2}.$$

Отсюда, для того чтобы получить заданную корреляционную функцию $R(\tau)$ равномерно распределенного случайного процесса, нужно брать исходный случайный процесс с коэффициентом корреляции

$$r_0(\tau) = 2 \sin \left[\frac{\pi}{2a^2} R(\tau) \right] = 2 \sin \left[\frac{\pi}{6} r(\tau) \right]. \quad (2.92)$$

Легко видеть, что коэффициент корреляции $r_0(\tau)$ почти совпадает в (2.92) с коэффициентом корреляции $r(\tau)$. Действительно, поскольку аргумент у синуса в (2.92) изменяется в пределах от $-\pi/6$ до $\pi/6$, замена функции синуса на этом интервале прямой линией внесет несущественную погрешность. Поэтому практически можно считать, что

$$r_0(\tau) = r(\tau),$$

т. е. сглаженный ограничитель, превращающий нормальный случайный процесс в процесс с равномерным распределением, почти не искажает энергетический спектр исходного процесса.

Оценим искажения корреляционной функции по величине максимума разности

$$\Delta r(r_0) = r_0 - \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{r_0}{2}.$$

Исследование функции $\Delta r(r_0)$ на экстремум показывает, что максимум ошибки Δr в интервале $(-1, 1)$ наблюдается при

$$r_0 = \pm 2 \sqrt{1 - \frac{9}{\pi^2}} = \pm 0,6,$$

причем величина максимума равна

$$\Delta r_{\max} = 0,6 - \frac{6}{\pi} \arcsin \sqrt{1 - \frac{9}{\pi^2}} = 0,016.$$

Отсюда видим, что максимальная погрешность в коэффициенте корреляции менее 2%. Такой погрешностью во многих практических случаях можно пренебречь.

График ошибки Δr как функции r_0 показан на рис. 2.6. Таким образом, можно использовать следующую

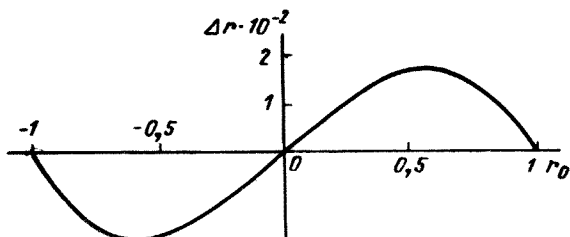


Рис. 2.6.

щий алгоритм моделирования случайного процесса с равномерным в интервале $(-a, a)$ распределением и заданной корреляционной функцией (2.90): на ЦВМ формируются реализации стационарного нормального случайного процесса $\xi_0(t)$ с параметрами $(0, 1)$ и коэффициентами корреляции $r(\tau)$, которые путем нелинейного безынерционного преобразования (2.91) превращаются в реализации процесса с желаемыми характеристиками.

2. Релеевский случайный процесс

Одномерная функция плотности, среднее значение и дисперсия процесса этого типа определяются соотношениями:

$$\omega(y) = \frac{y}{\sigma_0^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}}, \quad m_y = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_0, \quad \sigma_y^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_0^2, \quad (2.93)$$

где σ_0 — параметр распределения.

В задачах статистической радиотехники релеевский случайный процесс появляется обычно при рассмотрении огибающей стационарного узкополосного нормального шума [50, 80]. В связи с этим релеевский процесс $\xi(t)$ выражается через два одинаковых независимых стационарных

нарных нормальных случайных процесса $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с параметрами $(0, \sigma_0^2)$ (квадратурные составляющие узкополосного нормального шума с симметричным энергетическим спектром) в виде

$$\xi(t) = \sqrt{\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)}. \quad (2.94)$$

При этом корреляционная функция $R(\tau)$ релеевского случайного процесса (имеется в виду корреляционная функция нецентрированного релеевского процесса, такая, что $R(0) = m_y^2 + \sigma_y^2 = 2\sigma_0^2$) связана с нормированной корреляционной функцией $r_0(\tau)$ процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ зависимостью (см., например, [80]):

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{\pi}{2} \sigma_0^2 \left(1 + \frac{4-\pi}{\pi} r(\tau) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \sigma_0^2 \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 r_0^2(\tau) + \left(\frac{1}{2 \cdot 4} \right)^2 r_0^4(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 r_0^6(\tau) \dots \right], \end{aligned} \quad (2.95)$$

где $r(\tau)$ — нормированная корреляционная функция централизованного релеевского процесса.

В задачах, не требующих высокой точности решения, ряд (2.95) ввиду быстрой его сходимости можно ограничить лишь первыми двумя членами и считать, что $r(\tau)$ совпадает с $r_0^2(\tau)$, т. е.

$$R(\tau) = \frac{\pi}{2} \sigma_0^2 \left[1 + \frac{4-\pi}{\pi} r_0^2(\tau) \right].$$

Отсюда

$$r_0(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{4-\pi} \left(\frac{2R(\tau)}{\pi\sigma_0^2} - 1 \right)} = \sqrt{r(\tau)}. \quad (2.96)$$

Это открывает следующий простой путь приближенного моделирования релеевского случайного процесса с корреляционной функцией $R(\tau)$ и одномерной плотностью вероятностей (2.93): на ЦВМ одним из изложенных ранее способов формируются дискретные реализации двух независимых стационарных случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с параметрами $(0, 1)$ и с коэффициентом

корреляции $r_0(\tau)$, определяемым соотношением (2.96), а из них по формуле

$$\xi[n] = \sigma_0 \sqrt{\xi_1^2[n] + \xi_2^2[n]}$$

формируются реализации релеевского случайного процесса.

Погрешность метода при этом будет незначительной. Для оценки погрешности найдем разность между заданным коэффициентом корреляции $r(\tau)$ и получаемым $r_0(\tau)$. Зависимость $R(r_0)$, определяемую рядом (2.95), удастся выразить в замкнутом виде следующим образом:

$$R(r_0) = \sigma_0^2 [2E(r_0) - (1 - r_0^2) K(r_0)],$$

где $E(r_0)$ и $K(r_0)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода [92].

Отсюда

$$r(r_0) = \frac{R(r_0) - m_y^2}{\sigma_y^2} = \frac{2E(r_0) - (1 - r_0^2) K(r_0) - \frac{\pi}{2}}{2 - \frac{\pi}{2}}.$$

В результате упрощений, сделанных при выводе формулы (2.96), заданный коэффициент корреляции $r(r_0)$ приближенно заменяется величиной r_0^2 , что приводит к ошибке

$$\Delta r(r_0) = r_0^2 - r(r_0) = r_0^2 - \frac{2E(r_0) - (1 - r_0^2) K(r_0) - \frac{\pi}{2}}{2 - \frac{\pi}{2}}.$$

Используя таблицы полных эллиптических интегралов [92], можно найти зависимость ошибки Δr как функцию r_0 . На рис. 2.7 показан график ошибки $\Delta r(r_0)$, из которого видно, что максимальная погрешность формирования коэффициента корреляции составляет 2,5%. Такая ошибка во многих практических задачах является вполне допустимой.

Заметим, что описываемый способ моделирова-

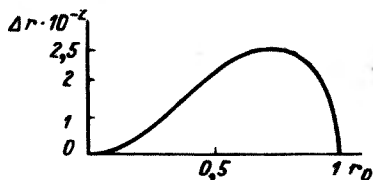


Рис. 2.7.

ния пригоден лишь для случаев, когда заданный коэффициент корреляции $r(\tau)$ не принимает отрицательных значений, иначе в формуле (2.96) появятся мнимые величины.

Пример 1. Пусть для моделирования задан релейский случайный процесс, корреляционную функцию которого можно аппроксимировать экспонентой:

$$r(\tau) = e^{-\omega_* |\tau|}. \quad (2.97)$$

Подставляя (2.97) в формулу (2.96), найдем нормированную корреляционную функцию исходных нормальных случайных процессов

$$r_0(\tau) = e^{-\omega_* |\tau|/2}.$$

Используя готовый алгоритм для моделирования нормального случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией (табл. 2.2), получим следующий алгоритм для моделирования данного релейского случайного процесса:

$$\begin{aligned} \xi[n] &= \sigma_0 \sqrt{\xi_1^2[n] + \xi_2^2[n]} = \\ &= \sigma_0 \sqrt{(\sqrt{1-\rho^2} x_1[n] + \rho \xi_1[n-1])^2 + (\sqrt{1-\rho^2} x_2[n] + \rho \xi_2[n-1])^2}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

где $\rho = e^{-\omega_* \Delta t/2}$; $x_1[n]$, $x_2[n]$ — последовательности независимых нормальных случайных чисел с параметрами (0,1).

3. Случайный процесс с показательным распределением

Одномерная функция плотности этого процесса, среднее значение и дисперсия соответственно равны

$$w(y) = \frac{1}{2\sigma_0^2} e^{-\frac{y}{2\sigma_0^2}}, \quad m_y = 2\sigma_0^2, \quad \sigma_y^2 = 4\sigma_0^2, \quad (2.99)$$

где σ_0 — параметр распределения.

Показательный процесс можно рассматривать как квадрат релейского случайного процесса (квадрат огибающей узкополосного нормального шума). В связи с этим показательный процесс можно представить как сумму квадратов двух одинаковых независимых стационарных нормальных случайных процессов с параметрами (0, σ^2):

$$\xi(t) = \xi_1^2(t) + \xi_2^2(t).$$

Корреляционная функция $R(\tau)$ нецентрированного показательного случайного процесса выражается через

нормированную корреляционную функцию $r_0(\tau)$ процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ в виде [50, 80]:

$$R(\tau) = 4\sigma_0^4 [1 + r(\tau)] = 4\sigma_0^4 [1 + r_0^2(\tau)],$$

где $r(\tau)$ — коэффициент корреляции центрированного показательного процесса. Отсюда

$$r_0(\tau) = \sqrt{r(\tau)}. \quad (2.100)$$

Равенство (2.100) в отличие от равенства (2.96) является точным.

Таким образом, можно использовать следующий способ моделирования показательного случайного процесса $\xi(t)$ с одномерной функцией плотности (2.99) и заданной нормированной корреляционной функцией $r(\tau)$. По известным правилам на ЦВМ формируются дискретные реализации $\xi_1[n]$ и $\xi_2[n]$ нормальных случайных процессов с коэффициентом корреляции $r_0(\tau) = \sqrt{r(\tau)}$, а из них по формуле

$$\xi[n] = \xi_1^2[n] + \xi_2^2[n]$$

образуются реализации требуемого показательного случайного процесса.

Так, например, если корреляционная функция показательного случайного процесса экспоненциальная вида (2.97), то алгоритм для выработки последовательностей $\xi_1[n]$ и $\xi_2[n]$ будет таким же, как и в рассмотренном выше примере моделирования релейского случайного процесса [выражение (2.98)].

Заметим, что аналогичным путем, суммируя несколько (более двух) квадратов нормальных случайных процессов, можно моделировать случайные процессы с законом распределения χ^2 (см. § 1.4, п. 4).

4. Логарифмически-нормальный случайный процесс

Одномерная плотность вероятностей, среднее значение и дисперсия логарифмически-нормального случайного процесса имеют вид

$$\omega(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0 y}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2\sigma_0^2}}, \quad m_y = \sqrt{e} \sigma_0,$$

$$\sigma_y^2 = e(e-1)\sigma_0^2,$$

где σ_0 — параметр распределения.

Логарифмически-нормальный случайный процесс часто используется в качестве модели атмосферных и промышленных помех [4].

Данный случайный процесс можно рассматривать как нелинейное безынерционное преобразование стационарного нормального случайного процесса с параметрами $(0, \sigma_0^2)$ звеном с характеристикой нелинейности $y=f(x)=e^x$. В дальнейшем, не нарушая общности, положим $\sigma_0=1$.

Для получения зависимости $R=\Phi(r_0)$ подставим функцию $f(x)=e^x$ в двойной интеграл (2.87). В данном случае функция $f(x)$ такова, что интеграл (2.87) удается выразить в конечном виде. Последнее легко сделать, так как интегрирование по переменным x_1 и x_2 сводится к вычислению табличных интегралов вида [25]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2 x^2 \pm qx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{-\frac{q^2}{4p^2}}.$$

В результате получим

$$R(r_0) = e^{r_0+1}, \quad r(r_0) = \frac{e^{r_0}-1}{e-1}. \quad (2.101)$$

Отсюда $r_0 = \ln[1 + (e-1)r]$.

Таким образом, для моделирования стационарного логарифмически-нормального случайного процесса с коэффициентом корреляции $r(\tau)$ нужно сформировать нормальный стационарный случайный процесс с коэффициентом корреляции

$$r_0(\tau) = \ln[1 + (e-1)r(\tau)], \quad (2.102)$$

а затем пропустить его через нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой $y=e^x$.

Оценим, к каким корреляционным искажениям приводит замена требуемого коэффициента корреляции $r_0(\tau)$, определяемого формулой (2.102), коэффициентом корреляции $r(\tau)$ моделируемого процесса. Величина ошибки согласно (2.101) равна

$$\Delta r(r_0) = r_0 - \frac{e^{r_0}-1}{e-1}.$$

График функции $\Delta r(r_0)$ показан на рис. 2.8, из которого видно, что максимальная ошибка составляет 20% при $r_0 = -\frac{1}{e} = -0,37$. Если возможные значения коэффициента корреляции лежат в интервале $(-0,2; 1)$, то ошибка не превышает 10%. Как видно, в этом случае корреля-

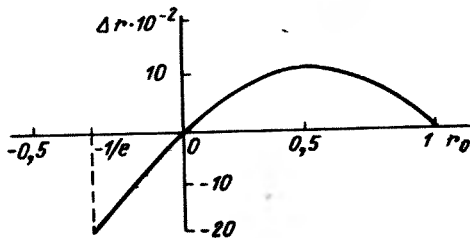


Рис. 2.8.

ционные искажения довольно большие, поэтому чаще приходится пользоваться точным выражением для коэффициента корреляции исходного процесса.

5. Случайный процесс с одномерным распределением по закону арксинуса

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в виде следующего преобразования нормального стационарного случайного процесса $\xi_0(t)$ с параметрами $(0, 1)$:

$$\xi(t) = \sin [\sigma_0 \xi_0(t)], \quad (2.103)$$

где σ_0 — некоторая константа.

В данном случае нелинейное преобразование $y = f(x) = \sin \sigma_0 x$ немонотонное и является периодической функцией. Если функцию $f(x) = \sin \sigma_0 x$ подставить в формулу (2.87) и при интегрировании по переменным x_1 и x_2 воспользоваться табличным интегралом [25]

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2 x^2} \sin [q(x + \lambda)] dx = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2 (x-\lambda)^2} \sin qx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{-\frac{q^2}{4p^2}} \sin q\lambda, \end{aligned}$$

то для функции $R = \varphi(r_0)$ нетрудно получить следующее выражение:

$$\varphi(r_0) = e^{-\sigma_0^2} \operatorname{sh} \sigma_0^2 r_0. \quad (2.104)$$

Согласно (2.104) коэффициент корреляции случайного процесса $\xi(t)$ связан с коэффициентом корреляции исходного процесса $\xi_0(t)$ соотношением

$$r(r_0) = \frac{\varphi(r_0)}{\varphi(1)} = \frac{\operatorname{sh} \sigma_0^2 r_0}{\operatorname{sh} \sigma_0^2}.$$

Отсюда

$$r_0(r) = \frac{1}{\sigma_0^2} \operatorname{arcsch} [(\operatorname{sh} \sigma_0^2) r]. \quad (2.105)$$

Рассмотрим теперь преобразование законов распределения.

В общем случае закон распределения процесса $\xi(t)$ как закон распределения периодической функции $y = \sin \sigma_0 x$ от нормально распределенной случайной величины x выражается сложным образом через закон распределения аргумента. Однако при достаточно большом параметре σ_0 распределение нормальной случайной величины $X = \sigma_0 x$, приведенное к интервалу периодичности функции $y = \sin X$, т. е. к интервалу $(-\pi, \pi)$, как показано в [51], будет весьма близким к равномерному на интервале периодичности. Тогда распределение случайной величины $y = \sin \sigma_0 x$ будет подчинено закону арксинуса:

$$\omega(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}, \quad |y| \leq 1. \quad (2.106)$$

Для этого вполне достаточно взять параметр $\sigma_0 = 2\pi$, что приводит к погрешности в равномерном законе всего лишь порядка 10^{-8} [51].

Случайные процессы с распределением (2.106) могут иметь место на выходе схем с фазовым детектором.

Таким образом, для моделирования стационарного случайного процесса с коэффициентом корреляции $r(\tau)$ и законом распределения арксинуса (2.106) нужно

сформировать стационарный нормальный случайный процесс с коэффициентом корреляции

$$r_0(\tau) = \frac{1}{\sigma_0^2} \operatorname{arcsch} [r(\tau) \operatorname{sh} \sigma_0^2],$$

а затем пропустить нормальный процесс через нелинейный элемент с синусоидальной характеристикой $y = \sin \sigma_0 x$, положив, например, $\sigma_0 = 2\pi$.

Если допустима меньшая точность воспроизведения закона распределения, то параметр σ_0 можно уменьшить. Удовлетворительная точность получается при $\sigma_0 = \pi$.

Заметим, что нелинейное преобразование (2.103) при $\sigma_0 > 1$ вносит большие корреляционные искажения [зависимость (2.105) явно нелинейная], поэтому при моделировании исходный нормальный случайный процесс $\xi_0(t)$ нужно брать с корреляционной функцией, определяемой точным выражением [формула (2.105)].

2.9. Моделирование многомерных стационарных нормальных случайных процессов

Многомерный стационарный случайный процесс определяется как совокупность N стационарных и стационарно связанных между собой случайных процессов $\xi_k(t)$, $k = \overline{1, N}$. Такой процесс принято обозначать в виде случайного вектора-столбца, зависящего от времени:

$$\|\xi(t)\| = \|\xi_k(t)\|_{k=\overline{1, N}}.$$

Многомерные случайные процессы используются при описании многомерных (многоканальных) систем. В настоящем параграфе рассматривается задача цифрового моделирования нормальных многомерных стационарных случайных процессов. Результатом решения этой задачи, как и в одномерном случае, является алгоритм, позволяющий формировать на ЦВМ многомерные дискретные реализации заданного процесса. N -мерный непрерывный нормальный стационарный случайный процесс $\|\xi(t)\|$ задается обычно либо в виде его корреляционной матрицы [35, 70]

$$\|R(\tau)\| = \|R_{kl}(\tau)\|_{\substack{l=\overline{1, N} \\ k=\overline{1, N}}},$$

либо в виде *спектральной матрицы*

$$\| G(\omega) \| = \| G_{kl}(\omega) \| \begin{matrix} l = \overline{1, N} \\ k = \overline{1, N}, \end{matrix}$$

где $R_{kl}(\tau) = M\{\xi_k(t) \xi_l(t)\}$ — автокорреляционные (при $k=l$) и взаимно корреляционные (при $k \neq l$) функции случайных процессов $\xi_k(t)$, $k = \overline{1, N}$; $G_{kl}(\omega)$ — преобразование Фурье от $R_{kl}(\tau)$. При этом, поскольку $R_{kl}(\tau) = R_{lk}(-\tau)$, элементы $G_{kl}(\omega)$ и $G_{lk}(\omega)$ спектральной матрицы комплексно-сопряженные,

$$G_{kl}(\omega) = G_{lk}^*(\omega).$$

Дискретные многомерные нормальные случайные процессы задаются аналогично непрерывным с помощью корреляционных и спектральных матриц [35, 70]

$$\| R[n] \| = \| R_{kl}[n] \| \begin{matrix} l = \overline{1, N} \\ k = \overline{1, N}, \end{matrix}$$

$$\| F(z) \| = \| F_{kl}(z) \| \begin{matrix} l = \overline{1, N} \\ k = \overline{1, N}, \end{matrix}$$

где $F_{kl}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_{kl}[n] z^n$, причем $F_{kl}(z) = F_{lk}(z^{-1})$.

Задачу цифрового моделирования многомерного нормального случайного процесса целесообразно сформулировать следующим образом. Задана корреляционная или спектральная матрица случайного процесса. Требуется отыскать алгоритм для формирования на ЦВМ дискретных реализаций случайного процесса с заданными корреляционными (спектральными) свойствами.

Для решения этой задачи воспользуемся, как и ранее, идеей формирующего линейного фильтра. В рассматриваемом случае речь идет о синтезе многомерного формирующего фильтра.

N -мерный линейный фильтр определяется как линейная динамическая система с N входами и N выходами [35]. Если $\|x(t)\| = \|x_k(t)\|_{k=\overline{1, N}}$ — входное воздействие и $\|y(t)\| = \|y_k(t)\|_{k=\overline{1, N}}$ — реакция системы, то связь между входом и выходом N -мерного линейного непре-

рванного фильтра описывается с помощью *передаточной матрицы* в виде

$$\| Y(p) \| = \| K(p) \| \| X(p) \| ,$$

где $\| X(p) \| = \| X_k(p) \|$ и $\| Y(p) \| = \| Y_k(p) \|$,

$k = \overline{1, N}$ — изображения входного и выходного сигналов соответственно в смысле преобразования Лапласа; $\| K(p) \| = \| K_{kl}(p) \|_{k=\overline{1, N}, l=\overline{1, N}}$ — передаточная матрица N -мерного

фильтра, у которой элементы $K_{kl}(p)$ являются передаточными функциями каналов l -й вход — k -й выход.

Аналогично описывается связь вход — выход в дискретных N -мерных линейных фильтрах:

$$\| Y_*(z) \| = \| K_*(z) \| \| X_*(z) \| ,$$

где $\| X_*(z) \|$ и $\| Y_*(z) \|$ — изображения в смысле дискретного преобразования Лапласа входного и выходного сигналов; $\| K_*(z) \|$ — передаточная матрица дискретного N -мерного фильтра.

Структурная схема многомерного фильтра на примере двумерного фильтра приведена на рис. 2.9, согласно которому

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= K_{11}(p) X_1(p) + K_{12}(p) X_2(p), \\ Y_2(p) &= K_{21}(p) X_1(p) + K_{22}(p) X_2(p). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Видим, что каждый из выходных сигналов $y_1(t)$ и $y_2(t)$ является суммой линейных операторов от входных сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Аналогичные соотношения имеют место и в общем случае. В этом и состоит *идентификация передаточных матриц* [35].

Пусть воздействие на входе N -мерного линейного фильтра представляет собой N -мерный белый шум, т. е. случайный процесс с корреляционной матрицей вида

$$\| \delta_{kl} \delta(\tau) \|_{k=\overline{1, N}, l=\overline{1, N}}$$

для непрерывного времени и

$$\| \delta_{kl} \|_{k=\overline{1, N}, l=\overline{1, N}}$$

для дискретного времени,

где $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$ $\delta(\tau)$ — дельта-функция. N -мерный белый шум определен здесь как совокупность N независимых между собой δ -коррелированных случайных процессов.

Можно показать (см., например, [35]), что при воз-

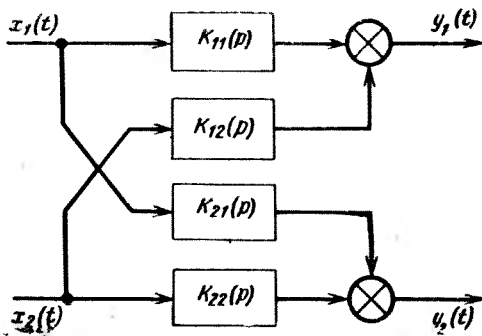


Рис. 2.9.

действии белого шума спектральная матрица процесса на выходе N -мерного фильтра для непрерывного и дискретного времени соответственно связана с передаточной матрицей фильтра соотношениями

$$\| G(\omega) \| = \| K(j\omega) \| \| K(-j\omega) \| ^T, \quad (2.108)$$

$$\| F(z) \| = \| K_*(z) \| \| K_*(z^{-1}) \| ^T,$$

где символом T обозначена транспонированная матрица.

Следовательно, для получения N -мерного случайного процесса с заданной спектральной матрицей нужно пропустить N -мерный белый шум через N -мерный формирующий фильтр, передаточная матрица которого удовлетворяет уравнениям (2.108). Для нахождения передаточной матрицы по заданной спектральной матрице требуется разбисие последней на два сомножителя вида (2.108). Эта процедура называется факторизацией спектральных матриц. Она может быть реализована по известным алгоритмам [35, 70].

Многомерная фильтрация белого шума осуществляется достаточно просто: каждая составляющая $\xi_k(t)$, $k = \overline{1, N}$

случайного процесса $\|\xi(t)\|$ на выходе N -мерного фильтра с передаточной матрицей $\|K_M(p)\|$ $\begin{matrix} l = \overline{1, N} \\ k = \overline{1, N} \end{matrix}$ получается пу-

тем суммирования по l составляющих $x_l(t)$, $l = \overline{1, N}$ входного процесса $\|x_l(t)\|_{l = \overline{1, N}}$, профильтрованных одномерными фильтрами с передаточными функциями $K_M(p)$ [см. формулу (2.107)]. Алгоритмы одномерной фильтрации рассмотрены выше.

При данном способе моделирования возможны два пути: 1) заданную спектральную матрицу непрерывного N -мерного случайного процесса можно непосредственно подвергнуть факторизации для получения передаточной матрицы непрерывного формирующего фильтра, а затем, используя описанные выше точные или приближенные методы дискретизации непрерывных фильтров, осуществить многомерную фильтрацию непрерывного белого шума; 2) по заданной спектральной матрице $\|G(\omega)\|$ непрерывного N -мерного процесса $\|\xi(t)\|$, используя z -преобразование, можно найти спектральную матрицу $\|F(z)\|$ соответствующего дискретного случайного процесса $\|\xi[n]\|$ (см. § 2.3), далее путем факторизации $\|F(z)\|$ найти передаточную функцию дискретного формирующего фильтра, а затем произвести многомерную фильтрацию дискретного белого шума.

Наибольшие трудности встречаются при факторизации спектральных матриц. В настоящее время разработаны алгоритмы факторизации лишь рациональных спектральных матриц, т. е. таких матриц, элементы которых являются дробно-рациональными функциями аргументов p или z .

Опишем, опуская доказательства, один из алгоритмов факторизации рациональных спектральных матриц, взятый из [70].

Пусть задана рациональная спектральная матрица

$$\|G(\omega)\| = \begin{vmatrix} G_{11}(\omega) & \dots & G_{1N}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{N1}(\omega) & \dots & G_{NN}(\omega) \end{vmatrix}.$$

Матрица $\|G(\omega)\|$ может быть приведена к виду

$$\|G(\omega)\| = \|K(j\omega)\| \|K(-j\omega)\|$$

путем следующих преобразований.

1. Определяется ранг матрицы m , затем один из главных миноров порядка m располагается в левом верхнем углу матрицы $\|G(\omega)\|$.

2. Матрица $\|G(\omega)\|$ приводится к диагональному виду. Для этого к k -й строке матрицы $\|G(\omega)\|$, $k = \overline{2, N}$, прибавляется первая строка, умноженная на $-G_{k1}/G_{11}$, затем к l -му столбцу прибавляется первый столбец, умноженный на $-G_{l1}/G_{11}$; получается матрица

$$\|G^{(1)}(\omega)\| = \begin{vmatrix} G_{11}(\omega) & 0 \\ 0 & E^{(2)}(\omega) \end{vmatrix}, \quad (2.109)$$

где элементы матрицы

$$\|E^{(2)}(\omega)\| = \|E_{kl}^{(2)}(\omega)\| \quad \begin{matrix} l = \overline{2, N} \\ k = \overline{2, N} \end{matrix}$$

имеют вид

$$E_{kl}^{(2)} = G_{kl} - \frac{G_{k1}G_{1l}}{G_{11}}. \quad (2.110)$$

С матрицей $\|E^{(2)}(\omega)\|$ проделываются те же преобразования, что с исходной матрицей $\|E^{(1)}(\omega)\| = \|G(\omega)\|$. При продолжении этого процесса на m -м шаге получается диагональная матрица

$$\|G^{(m)}(\omega)\| = \|D(\omega)\| = \|D_{kl}(\omega)\| \quad \begin{matrix} l = \overline{1, N} \\ k = \overline{1, N} \end{matrix}$$

такая, что

$$D_{kk} \equiv 0, \quad k = \overline{m+1, N}.$$

3. Находится вспомогательная матрица

$$\|B(\omega)\| = \|B_{kl}(\omega)\| \quad \begin{matrix} l = \overline{1, N} \\ k = \overline{1, N} \end{matrix}$$

элементы которой имеют следующий вид:

$$B_{kl}(\omega) = 0, \quad l > k,$$

$$B_{kl}(\omega) = \frac{B_{kl}^{(1)}}{D_{11}}, \quad l < k, \quad (2.111)$$

$$B_{11}(\omega) = 1,$$

где $B_{kl}^{(i)}$ определяются из рекуррентных соотношений

$$B_{kl}^{(1)} = G_{kl},$$

$$B_{kl}^{(l)} = B_{kl}^{(l-1)} - \frac{B_{k, i-1}^{(l-1)} - B_{i-1, l}^{(l-1)}}{B_{i-1, i-1}^{(l-1)}}. \quad (2.112)$$

4. Находятся вспомогательные полиномы

$$C_l(\omega) = \prod_v (\omega - \omega_v^{(l)}),$$

где $\omega_v^{(l)}$, $v=1, 2, \dots$, — нули полиномов $Q_{kl}(\omega)$, $k=\overline{1, m}$, лежащих в нижней полуплоскости, считаемые столько раз, какова их максимальная кратность, причем $Q_{kl}(\omega)$ — знаменатели дробно-рациональных функций, представляющих собой элементы матрицы $\|B(\omega)\|$:

$$B_{kl}(\omega) = \frac{P_{kl}(\omega)}{Q_{kl}(\omega)}.$$

5. По способу, рассмотренному в § 2.9, п. 2, дробно-рациональные функции

$$A_l(\omega) = \frac{D_{ll}(\omega)}{|C_l(\omega)|^2}$$

представляются в виде

$$A_l(\omega) = \left| \frac{P_l(\omega)}{Q_l(\omega)} \right|^2,$$

где полиномы $P_l(\omega)$ и $Q_l(\omega)$ не имеют нулей в нижней полуплоскости.

На этом процесс факторизации заканчивается. Окончательно передаточная матрица формирующего фильтра записывается в виде

$$\|K(j\omega)\| = \left\| K_{kl}(j\omega) \right\|_{k=1, N}^{l=1, m} =$$

$$= \left\| B_{kl}(\omega) C_l(\omega) \frac{P_l(\omega)}{Q_l(\omega)} \right\|_{k=1, N}^{l=1, m}. \quad (2.113)$$

Здесь описан алгоритм факторизации рациональных спектральных матриц непрерывных многомерных про-

цессов. Факторизация спектральных матриц дискретных процессов осуществляется аналогично, только вместо корней, расположенных в нижней полуплоскости, берутся корни, расположенные в единичном круге.

Пример 1. Пусть задан двумерный непрерывный стационарный центрированный случайный процесс $\|\xi(t)\|$ с корреляционной матрицей

$$\|G(\omega)\| = \begin{vmatrix} G_{11}(\omega) & G_{12}(\omega) \\ G_{21}(\omega) & G_{22}(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{b_{11}^2 + \omega^2} & \frac{a_{12}}{b_{12}^2 + \omega^2} \\ \frac{a_{21}}{b_{21}^2 + \omega^2} & \frac{a_{22}}{b_{22}^2 + \omega^2} \end{vmatrix}, \quad (2.114)$$

где $a_{kl}, b_{kl}, k=1, 2, l=1, 2$, — некоторые положительные константы, причем $a_{12}=a_{21}, b_{12}=b_{21}$.

Корреляционная матрица, соответствующая спектральной матрице (2.114), имеет вид

$$\|R(\tau)\| = \begin{vmatrix} \sigma_{11}^2 e^{-b_{11}|\tau|} & \sigma_{12}^2 e^{-b_{12}|\tau|} \\ \sigma_{21}^2 e^{-b_{21}|\tau|} & \sigma_{22}^2 e^{-b_{22}|\tau|} \end{vmatrix}, \quad (2.115)$$

где $\sigma_{11}^2 = \frac{a_{11}}{2b_{11}}, \sigma_{22}^2 = \frac{a_{22}}{2b_{22}}$ и $\sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = \frac{a_{12}}{2b_{12}} = \sigma_{11}\sigma_{22}r$. — автокор-

реляционные и взаимно корреляционные моменты процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ соответственно; r — коэффициент взаимной корреляции процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ в совпадающие моменты времени. Коэффициенты b_{11}, b_{22} и b_{12} представляют собой в данном случае ширину (на уровне 0.5) энергетических спектров $G_{11}(\omega), G_{22}(\omega)$ и взаимного энергетического спектра $G_{12}(\omega)$ процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

Требуется произвести факторизацию спектральной матрицы (2.114) для получения передаточной матрицы формирующего фильтра.

Будем осуществлять процедуру факторизации поэтапно в соответствии с приведенным выше алгоритмом факторизации.

1. В данном случае ранг спектральной матрицы $m=2$.

2. Для приведения матрицы $\|G(\omega)\|$ к диагональной требуется один шаг. По формулам (2.109) и (2.110) получаем

$$\|D(\omega)\| = \|G^{(2)}(\omega)\| = \begin{vmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} - \frac{G_{12}^2}{G_{11}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{b_{11}^2 + \omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{a_{22}}{b_{22}^2 + \omega^2} - \frac{a_{12}^2 (b_{11}^2 + \omega^2)}{a_{11} (b_{12}^2 + \omega^2)^2} \end{vmatrix}.$$

3. В соответствии с выражениями (2.111) и (2.112) вспомогательная матрица $\|B(\omega)\|$ имеет вид

$$\|B(\omega)\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ B_{21} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{G_{21}}{D_{11}} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}(b_{11}^2 + \omega^2)}{a_{11}(b_{12}^2 + \omega^2)} & 1 \end{vmatrix}$$

4. В рассматриваемом случае нужно найти лишь один вспомогательный полином $C_1(\omega)$. Для этого требуется найти корни знаменателя у элемента $B_{21}(\omega)$ матрицы $\|B(\omega)\|$, т. е. корни полинома $\omega^2 + b_{12}^2$. Эти корни равны

$$\omega_{1,2}^{(1)} = \pm j b_{12}.$$

Следовательно,

$$C_1(\omega) = \omega + j b_{12}.$$

5. На заключительном этапе требуется произвести факторизацию дробно-рациональных функций

$$A_1(\omega) = \frac{D_{11}(\omega)}{|C_1(\omega)|^2} = \frac{a_{11}}{(b_{11}^2 + \omega^2)(\omega + j b_{12})(\omega - j b_{12})}$$

и

$$A_2(\omega) = D_{22}(\omega) = \frac{a_{22}}{b_{22}^2 + \omega^2} - \frac{a_{12}^2(b_{11}^2 + \omega^2)}{a_{11}(b_{12}^2 + \omega^2)^2} = \frac{a\omega^4 + b\omega^2 + c}{a_{11}(b_{12}^2 + \omega^2)^2(b_{22}^2 + \omega^2)},$$

где $a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$; $b = 2a_{11}a_{22}b_{12}^2 - a_{12}^2b_{11}^2 - a_{12}^2b_{22}^2$; $c = a_{11}a_{22}b_{12}^4 - a_{12}^2b_{11}^2b_{22}^2$.

В данном случае корни числителей и знаменателей у дробно-рациональных функций $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ легко вычисляются. Используя корни, лежащие в верхней полуплоскости (корни с положительными мнимыми частями), получим

$$A_1(\omega) = \left| \frac{\sqrt{a_{11}}}{(\omega - j b_{11})(\omega - j b_{12})} \right|^2,$$

$$A_2(\omega) = \left| \frac{\sqrt{a}(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{\sqrt{a_{11}}(\omega - j b_{12})^2(\omega - j b_{22})} \right|^2,$$

где ω_1 и ω_2 — это те из корней

$$\omega_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

полинома $a\omega^4 + b\omega^2 + c$, которые имеют положительную мнимую часть.

Окончательно передаточная матрица формирующего фильтра в соответствии с (2.113) запишется в виде

$$\|K(j\omega)\| = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{a_{11}}(\omega + j b_{12})}{(\omega - j b_{11})(\omega - j b_{12})} & 0 \\ \frac{a_{12} \sqrt{a_{11}}(b_{11} + \omega^2)(\omega + j b_{12})}{a_{11}(b_{12} + \omega^2)(\omega - j b_{11})(\omega - j b_{12})} & \frac{\sqrt{a}(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{\sqrt{a_{11}}(\omega - j b_{12})^2(\omega - j b_{22})} \end{vmatrix}.$$

Передаточную функцию $K_{21}(j\omega)$ в матрице $\|K(j\omega)\|$ можно несколько упростить, умножив числитель и знаменатель на $(\omega + j b_{11})(\omega - j b_{12})$ и сократив полученное выражение на $(b_{11} + \omega^2)$ и $(b_{12} + \omega^2)$, тогда

$$K_{21}(j\omega) = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\omega + j b_{11}}{(\omega - j b_{12})^2}.$$

Путем непосредственной подстановки легко убедиться, что матрица $\|K(j\omega)\|$ удовлетворяет условию

$$\|K(j\omega)\| \|K(-j\omega)\|^T = \begin{vmatrix} K_{11}(j\omega) & 0 \\ K_{21}(j\omega) & K_{22}(j\omega) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_{11}(-j\omega) & K_{21}(-j\omega) \\ 0 & K_{22}(-j\omega) \end{vmatrix} = \|G(\omega)\|.$$

Элементы $K_{kl}(j\omega)$ передаточной матрицы $\|K(j\omega)\|$ представляют собой передаточные функции двумерного формирующего фильтра по каналам « l -й вход — k -й выход» в смысле преобразования Фурье. Для получения передаточных функций в смысле преобразования Лапласа перейдем от переменной $j\omega$ к переменной $p = j\omega$:

$$\|K(p)\| = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{a_{11}}(p - b_{12})}{(p + b_{11})(p + b_{12})} & 0 \\ \frac{a_{12}(p - b_{11})}{\sqrt{a_{11}}(p + b_{12})^2} & \frac{\sqrt{a}(p - j\omega_1)(p - j\omega_2)}{\sqrt{a_{11}}(p + b_{12})^2(p + b_{22})} \end{vmatrix}.$$

На рис. 2.9 показана структурная схема двумерного формирующего фильтра, на выходе которого образуется двумерный случайный процесс с требуемыми спектральными характеристиками, если на вход фильтра воздействует белый шум. Заменяя непрерывный двумерный фильтр соответствующим дискретным фильтром, получим алгоритм для формирования на ЦВМ дискретных реализаций двумерного случайного нормального процесса, т. е. дискретных реализаций двух стационарных и стационарно-связанных нормальных случайных процессов с экспоненциальными авто- и взаимно корреляционными функциями вида (2.115).

При другом подходе к синтезу формирующего фильтра нужно сначала найти спектральную матрицу соответствующего дискретного многомерного случайного процесса $\|\xi[n]\|$. В рассматриваемом

примере эта матрица имеет вид

$$\|F(z)\| = \begin{vmatrix} F_{11}(z) & F_{12}(z) \\ F_{21}(z) & F_{22}(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_{11}^2}{|1 - \rho_{11}z|^2} & \frac{\alpha_{12}^2}{|1 - \rho_{12}z|^2} \\ \frac{\alpha_{12}^2}{|1 - \rho_{12}z|^2} & \frac{\alpha_{22}^2}{|1 - \rho_{22}z|^2} \end{vmatrix}$$

где

$$\alpha_{11}^2 = (1 - \rho_{11}^2) \sigma_{11}^2; \quad \alpha_{12}^2 = (1 - \rho_{12}^2) \sigma_{11} \sigma_{12} r; \quad \alpha_{22}^2 = (1 - \rho_{22}^2) \sigma_{22}^2;$$

$$\rho_{kl} = e^{-b_{kl} \Delta t}.$$

Произведя факторизацию спектральной матрицы $\|F(z)\|$ аналогично факторизации спектральной матрицы $\|G(\omega)\|$, получим

$$\|K_*(z)\| = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{\alpha_{11}}(z - \rho_{12})}{(1 - \rho_{11}z)(1 - \rho_{12}z)} & 0 \\ \frac{\alpha_{12}(z - \rho_{11})}{\sqrt{\alpha_{11}}(1 - \rho_{12}z)^2} & \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{z_1 z_2}}(z - z_1)(z - z_2)}{\sqrt{\alpha_{11}}(1 - \rho_{12}z)^2(1 - \rho_{22}z)} \end{vmatrix}. \quad (2.116)$$

Здесь z_1 и z_2 — это те из корней

$$z_{1, 2, 3, 4} = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}, \quad v = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\beta},$$

абсолютная величина которых больше единицы, где

$$\alpha = \alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2 \rho_{12}^2 - \alpha_{12}^4 \rho_{11} \rho_{22};$$

$$\beta = \alpha_{12}^4 [\rho_{11}(1 + \rho_{22}^2) + \rho_{22}(1 + \rho_{11}^2)] - 2\alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2 \rho_{12}(1 + \rho_{12}^2);$$

$$\gamma = \alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2 (1 + \rho_{12}^2)^2 - \alpha_{12}^4 (1 - \rho_{11}^2)(1 + \rho_{22}^2).$$

Передаточной матрице (2.116) соответствует следующий рекуррентный алгоритм формирования дискретных реализаций процессов $\xi_1[n]$ и $\xi_2[n]$ из реализаций независимых последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ независимых нормальных случайных чисел с параметрами (0, 1) (дискретный двумерный белый шум)

$$\xi_1[n] = \xi_{11}[n],$$

$$\xi_2[n] = \xi_{21}[n] + \xi_{22}[n],$$

где

$$\xi_{11}[n] = -\rho_{12} \sqrt{\alpha_{11}} x_1[n] + \sqrt{\alpha_{11}} x_1[n-1] + (\rho_{11} + \rho_{12}) \xi_{11}[n] - \rho_{11} \rho_{12} \xi_{11}[n-2];$$

$$\xi_{21}[n] = -\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\alpha_{11}}} \rho_{11} x_1[n] + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\alpha_{11}}} x_1[n-1] + \\ + 2\rho_{12}\xi_{21}[n-1] - \rho_{12}^2\xi_{21}[n-2];$$

$$\xi_{22}[n] = \sqrt{\frac{\alpha_{z_1 z_2}}{\alpha_{11}}} x_2[n] - \sqrt{\frac{\alpha}{z_1 z_2 \alpha_{11}}} (z_1 + z_2) x_2[n-1] + x_2[n-2] + \\ + (2\rho_{12} + \rho_{22}) \xi_{22}[n-1] - 2\rho_{12}(\rho_{12} + 2\rho_{22}) \xi_{22}[n-2] + \rho_{12}^2 \rho_{22} \xi_{22}[n-3].$$

Написанные рекуррентные уравнения легко получить, если произвести идентификацию передаточных функций $K_{*11}(z)$, $K_{*21}(z)$ и $K_{*22}(z)$ матрицы (2.116).

Рассмотренный пример показывает, что факторизация спектральных матриц осуществляется сравнительно просто, если удастся аналитически найти нули соответствующих полиномов. При факторизации спектральной матрицы непрерывного двумерного процесса это не представляло труда, так как для определения нулей требовалось решать только квадратные и биквадратные уравнения. При факторизации спектральной матрицы дискретного двумерного процесса были квадратные уравнения и возвратное уравнение четвертой степени, также допускающее аналитическое решение.

В других, более сложных случаях нули полинома не всегда удается найти аналитически. В этих случаях прибегают к численным методам решения уравнений n -й степени. В общем виде процесс факторизации можно реализовать на ЦВМ как стандартную программу. Для этой цели кроме приведенного здесь могут быть использованы и другие алгоритмы факторизации [91, 95, 97].

Следует заметить, что все существующие в настоящее время алгоритмы факторизации спектральных матриц, вообще говоря, весьма трудоемки.

2.10. Моделирование нестационарных нормальных случайных процессов со стационарными приращениями

В данном параграфе рассматривается моделирование специального класса нестационарных нормальных случайных процессов, а именно случайных процессов со стационарными приращениями (СПСП).

По определению [71, 90], случайный процесс $\xi(t)$ со стационарными k -ми приращениями (СПСП- k) — это такой случайный процесс, k -я разность которого $\varepsilon_{\Delta t}^{(k)}(t)$ является стационарным случайным процессом, где

$$\varepsilon_{\Delta t}^{(k)}(t) = \varepsilon_{\Delta t}^{(k-1)}(t) - \varepsilon_{\Delta t}^{(k-1)}(t - \Delta t),$$

$$\varepsilon_{\Delta t}^{(1)}(t) = \varepsilon_{\Delta t}^{(1)}(t) = \xi(t) - \xi(t - \Delta t).$$

Такому определению, как нетрудно видеть, удовлетворяют случайные процессы, у которых математическое ожидание $m(t)$ является полиномом k -й степени и k -я производная $\xi^{(k)}(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс. В дальнейшем положим $m(t) \equiv 0$.

СПСП используются, например, при описании траекторий движения некоторых целей в радиолокации [2], когда скорость, ускорение или более высокие производные закона движения целей можно считать стационарными случайными процессами. Другим примером СПСП является набег фазы генератора, модулированного по частоте стационарным случайным процессом [59, 71].

С точки зрения цифрового моделирования в качестве основной характеристики СПСП- k удобно использовать корреляционную функцию k -й разности процесса:

$$R_{\bullet}^{(k)}(\tau, \Delta t) = M \{ \varepsilon_{\Delta t}^{(k)}(t) \varepsilon_{\Delta t}^{(k)}(t - \tau) \}. \quad (2.117)$$

Рассмотрим моделирование случайных процессов со стационарными k -ми приращениями по заданным корреляционным функциям их k -х приращений. Для получения моделирующих алгоритмов выразим k -ю разность

$\varepsilon_{\Delta t}^{(k)}(t)$ СПСП- k через значения самого процесса $\xi(t)$.

Для СПСП-1

$$\varepsilon_{\Delta t}^{(1)}(t) = \xi(t) - \xi(t - \Delta t),$$

для СПСП-2

$$\varepsilon_{\Delta t}^{(2)}(t) = \xi(t) - 2\xi(t - \Delta t) + \xi(t - 2\Delta t),$$

вообще, для СПСП- k , как нетрудно показать,

$$\varepsilon_{\Delta t}^{(k)}(t) = \sum_{m=0}^k (-1)^m C_k^m \xi(t - m\Delta t),$$

где $C_k^m = \frac{k!}{m!(n-m)!}$ — биномиальные коэффициенты. Отсюда

$$\xi(t) = \varepsilon_{\Delta t}^{(k)}(t) - \sum_{m=1}^k (-1)^m C_k^m \xi(t - m\Delta t).$$

Переходя к соответствующим дискретным функциям, получим

$$\xi[n] = \varepsilon_{\Delta t}^{(k)}[n] - \sum_{m=1}^k (-1)^m C_k^m \xi[n - m]. \quad (2.118)$$

Например, для случайного процесса со стационарными третьими приращениями

$$\xi[n] = \varepsilon_{\Delta t}^{(3)}[n] + 3\xi[n - 1] - 3\xi[n - 2] + \xi[n - 3].$$

Согласно (2.118) передаточная функция дискретного линейного фильтра, формирующего из k -й разности СПСП- k дискретные значения самого процесса, имеет вид

$$K_*(z) = \frac{1}{(1-z)^k}. \quad (2.119)$$

Итак, дискретные реализации СПСП- k можно формировать по рекуррентному алгоритму, используя дискретные значения $\varepsilon_{\Delta t}^{(k)}[n]$ k -й разности процесса. Поскольку k -я разность является стационарным случайным процессом с корреляционной функцией (2.117), для формирования ее дискретных значений можно использовать рассмотренные выше алгоритмы.

Таким образом, для моделирования случайного процесса со стационарными k -ми приращениями можно использовать следующий способ. На ЦВМ с помощью рассмотренных выше алгоритмов моделируется стационарный дискретный случайный процесс $\varepsilon_{\Delta t}^{(k)}[n]$ с корреляционной функцией

$$R_{\varepsilon}^{(k)}[n, 1] = R_{\varepsilon}^{(k)}(n\Delta t, \Delta t),$$

а из него согласно рекуррентному уравнению (2.118) формируется требуемый случайный процесс. При выработке начального значения $\xi[0]$ процесса $\xi[n]$ предыдущие

его значения $\xi[-n]$, $n=1, k$, можно либо положить равными нулю, либо задаться ими, исходя из начальных условий решаемой задачи, например при моделировании траекторий целей, движущихся со случайным стационарным ускорением (СПСП-2), для нахождения $\xi[-1]$, $\xi[-2]$ можно использовать заданные в качестве исходных начальные значения положения цели и ее скорости.

На практике случайный процесс со стационарными приращениями не всегда удобно характеризовать с помощью корреляционной функции его k -й разности. В ряде случаев в качестве основной характеристики СПСП- k целесообразно использовать корреляционную функцию k -й производной процесса, являющейся стационарным случайным процессом. В связи с этим представляет интерес рассмотреть моделирование СПСП- k по их заданной k -й производной.

Пусть $R^{(k)}(\tau)$ и $G^{(k)}(\omega)$ — корреляционная функция и энергетический спектр k -й производной случайного процесса $\xi(t)$ со стационарными k -ми приращениями. Требуется, используя $R^{(k)}(\tau)$ или $G^{(k)}(\omega)$, найти алгоритм для формирования на ЦВМ дискретных реализаций случайного процесса $\xi(t)$.

Для получения такого алгоритма достаточно найти связь между корреляционной функцией $R^{(k)}(\tau)$ k -й производной СПСП- k и корреляционной функцией $R_{\Delta}^{(k)}(\tau)$ k -й разности процесса, чтобы потом воспользоваться рекуррентной формулой (2.118). Эту связь можно найти следующим образом. Случайный процесс $\xi^{(k)}(t)$, который является k -й производной от СПСП- k , наблюдается на выходе линейной системы с передаточной функцией $K_1(p) = p^k$, когда на вход системы воздействует процесс $\xi(t)$. Обратно, зная $\xi^{(k)}(t)$, можно восстановить исходный случайный процесс $\xi(t)$ (с точностью до начальных условий, которые в дальнейшем положим нулевыми), пропуская $\xi^{(k)}(t)$ через линейную систему с передаточной функцией

$$K_2(p) = \frac{1}{p^k},$$

т. е. через интегрирующее звено k -го порядка.

В свою очередь, k -я разность $s_{\Delta t}^{(k)}(t)$ процесса $\xi(t)$ может быть получена путем пропускания его через линейную

систему из одинаковых последовательно соединенных звеньев, состоящих из элемента задержки на Δt и вычитающего элемента (рис. 2.10) Передаточная функция такого звена

$$K(p) = 1 - e^{-p\Delta t}.$$

Следовательно, передаточная функция фильтра, преобразующего $\xi^{(k)}(t)$ в $\varepsilon_{\Delta t}^{(k)}(t)$, имеет вид

$$K_s(p) = K_2(p) K^k(p) = \frac{1}{p^k} (1 - e^{-p\Delta t})^k = \left(\frac{1 - e^{-p\Delta t}}{p} \right)^k,$$

а частотная характеристика

$$K_s(j\omega) = \left(\frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{j\omega} \right)^k = \left(\frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega}{2}} e^{-j \frac{\omega\Delta t}{2}} \right)^k.$$

Отсюда получаем, что энергетический спектр $G_s^{(k)}(\omega, \Delta t)$ k -й разности $\varepsilon_{\Delta t}^{(k)}(t)$ СПСП- k связан с энергетическим спектром $G^{(k)}(\omega)$ k -й производной соотношением

$$G_s^{(k)}(\omega, \Delta t) = G^{(k)}(\omega) |K_s(j\omega)|^2 = G^{(k)}(\omega) \left(\frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^{2k}. \quad (2.120)$$

Нетрудно убедиться, что корреляционная функция $R_s^{(k)}(\tau, \Delta t)$ является при этом многократной сверткой вида

$$\begin{aligned} R_s^{(k)}(\tau, \Delta t) &= \\ &= \underbrace{R^{(k)}(\tau) * h_0(\tau, \Delta t) * h_0(\tau, \Delta t) * \dots * h_0(\tau, \Delta t)}_{2k \text{ раз}} = \\ &= \underbrace{R^{(k)}(\tau) * h_1(\tau, \Delta t) * h_1(\tau, \Delta t) * \dots * h_1(\tau, \Delta t)}_{k \text{ раз}}, \quad (2.121) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h_0(\tau, \Delta t) &= \begin{cases} 1, & |\tau| \leq \Delta t/2, \\ 0, & |\tau| > \Delta t/2; \end{cases} \\ h_1(\tau, \Delta t) &= \begin{cases} \Delta t - |\tau|, & |\tau| \leq \Delta t, \\ 0, & |\tau| > \Delta t \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, для моделирования СПСП- k по его k -й производной, имеющей энергетический спектр $G^{(k)}(\omega)$, можно использовать следующий способ. На ЦВМ моделируется дискретный случайный процесс $\varepsilon_{\Delta t}^{(k)}[n, 1] = \varepsilon_{\Delta t}^{(k)}(n\Delta t, \Delta t)$, порождаемый непрерывным стационарным случайным процессом с энергетическим спектром $G_{\varepsilon}^{(k)}(\omega, \Delta t)$ и функцией корреляции $R_{\varepsilon}^{(k)}(\tau, \Delta t)$,

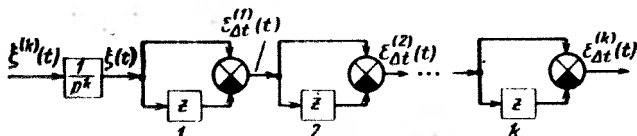


Рис. 2.10.

определяемыми выражениями (2.120), (2.121), а затем по рекуррентному алгоритму (2.118) формируется дискретный случайный процесс $\xi[n]$, изображающий требуемый непрерывный случайный процесс $\xi(t)$ со стационарными k -ми приращениями.

Для описания случайных процессов со стационарными первыми приращениями в теоретических исследованиях обычно используется так называемая *структурная функция* [59, 71]

$$D(\theta) = M \{[\varepsilon_0^{(1)}(t)]^2\} = M \{[\xi(t) - \xi(t - \theta)]^2\},$$

которая представляет собой зависимость дисперсии разности значений процесса, разделенных интервалом времени $\Delta t = \theta$.

Структурная функция $D(\theta)$ является четной функцией, причем $D(0) = 0$. Корреляционная функция $R_{\varepsilon}^{(1)}(\tau, \theta)$ разности $\varepsilon_0^{(1)}(t)$ СПСП-1 связана со структурной функцией зависимостью [59, 71]

$$R_{\varepsilon}^{(1)}(\tau, \theta) = \frac{1}{2} [D(\tau - \theta) + D(\tau + \theta) - 2D(\tau)].$$

Отсюда получаем, что если требуется синтезировать случайный процесс $\xi(t)$ со стационарными первыми приращениями и с заданной структурной функцией $D(\theta)$, то для этого можно использовать следующий алгоритм:

$$\xi[n] = \varepsilon_{\Delta t}^{(1)}[n] + \xi[n - 1],$$

где $\xi_{\Delta t}^{(1)}[n]$ — дискретный случайный процесс с корреляционной функцией

$$R_{\xi}^{(1)}[n, 1] = \frac{1}{2} \{D[n-1] + D[n+1] - 2D[n]\}.$$

Полученные алгоритмы для моделирования СПСП- k не обладают методической погрешностью, если алгоритм формирования k -й разности процесса не имеет методической погрешности. При моделировании СПСП- k по его k -й производной нетрудно получить приближенные алгоритмы. Действительно, поскольку случайный процесс со стационарными k -ми приращениями можно рассматривать как k -кратный интеграл по его k -й производной, то, формируя дискретные реализации $\xi^{(k)}[n]$ производной $\xi^{(k)}(t)$ и подвергая их k -кратному суммированию (дискретному интегрированию), получим приближенные значения процесса $\xi(t)$. Например, приближенный алгоритм формирования случайного процесса со стационарными первыми приращениями при замене непрерывного интегрирования дискретным по способу прямоугольников имеет вид

$$\xi[n] = \Delta t \xi^{(1)}[n] + \xi[n-1]. \quad (2.122)$$

Уравнению (2.122) соответствует дискретная передаточная функция

$$K_{*1}(z) = \frac{\Delta t}{1-z}. \quad (2.123)$$

В качестве дискретного интегрирующего звена k -го порядка при приближенном моделировании СПСП- k можно использовать цепочки, состоящие из k звеньев с передаточными функциями (2.123), т. е. фильтр с передаточной функцией

$$K_{*k}(z) = \frac{\Delta t^k}{(1-z)^k}.$$

Тогда рекуррентный алгоритм для формирования $\xi[n]$ из $\xi^{(k)}[n]$ запишется в виде

$$\xi[n] = \xi^{(k)}[n] \Delta t^k - \sum_{m=1}^k (-1)^m C_k^m \xi[n-k].$$

Это наиболее простой, но наименее точный алгоритм, так как повторное приближенное интегрирование спо-

собом' прямоугольников приводит к довольно быстрому накоплению ошибок. Для уменьшения ошибок нужно использовать другие известные алгоритмы k -кратного дискретного интегрирования повышенной точности. Дискретные передаточные функции интегрирующих звеньев k -го порядка этого типа даны в табл. 3.1.

Приближенные алгоритмы моделирования СПСП- k , основанные на интегрировании k -й производной процесса, неудобно использовать в случаях, когда производная $\xi^{(k)}(t)$ представляет собой белый шум. Процессы с k -й производной в виде белого шума являются частным случаем СПСП- k . Это так называемые *винеровские процессы* k -го порядка [7, 8]. Моделирование винеровских процессов целесообразно производить с помощью точных алгоритмов, приведенных раньше.

Рассмотрим теперь примеры моделирования случайных процессов со стационарными приращениями.

Пример 1. Пусть для моделирования задан нормальный случайный процесс $\xi(t)$ со стационарными первыми приращениями и с корреляционной функцией производной

$$R^{(1)}(\tau) = \sigma^2 e^{-\bar{\omega}_* |\tau|}. \quad (2.124)$$

В соответствии с (2.121) корреляционная функция дискретных значений разности $e_{\Delta t}^{(1)}(t)$ процесса $\xi(t)$ в точках $t_n = n\Delta t$ равна

$$\begin{aligned} R_{\sigma}^{(1)}[n, 1] &= R_{\sigma}^{(1)}(n\Delta t, \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} R^{(1)}(n\Delta t - \theta) h_1(\theta) d\theta = \\ &= \int_{-\Delta t}^{\Delta t} \sigma^2 e^{-\bar{\omega}_* |n\Delta t - \theta|} (\Delta t - |\theta|) d\theta = \\ &= \sigma^2 \Delta t^2 \int_{-1}^1 e^{-\bar{\omega}_* |x-n|} (1 - |x|) dx, \end{aligned}$$

где $\bar{\omega}_* = \omega_* \Delta t$, $x = \theta/\Delta t$.

Полученный интеграл легко вычисляется. В результате имеем

$$R_{\sigma}^{(1)}[n, 1] = \begin{cases} \frac{2\sigma^2}{\omega_*^2} (e^{-\bar{\omega}_*} + \bar{\omega}_* - 1), & n = 0, \\ cR^{(1)}[n] = \frac{2\sigma^2}{\omega_*^2} (\operatorname{ch} \bar{\omega}_* - 1) e^{-\bar{\omega}_* |n|}, & |n| \geq 1, \end{cases} \quad (2.125)$$

где

$$c = \frac{2}{\omega_*^2} (\operatorname{ch} \bar{\omega}_* - 1); \quad (2.126)$$

$R^{(1)}[n] = R^{(1)}(n\Delta t)$ — корреляционная функция дискретных значений производной процесса $\xi(t)$.

Отсюда видно, что в данном случае корреляционная функция $R_*^{(1)}[n, 1]$ с точностью до множителя c совпадает с корреляционной функцией $R^{(1)}[n]$ при всех n , кроме $n=0$. В точке $n=0$, как нетрудно убедиться,

$$R_*^{(1)}[0, 1] < R^{(1)}[0].$$

В связи с этим можно записать

$$R_*^{(1)}[n, 1] = c\sigma^2 (e^{-\bar{\omega}_* |n|} - a\delta[n]), \quad (2.127)$$

где

$$a = \frac{R^{(1)}[0] - R_*^{(1)}[0, 1]}{R^{(1)}[0]} = \frac{\operatorname{sh} \bar{\omega}_* - \bar{\omega}_*}{\operatorname{ch} \bar{\omega}_* - 1}. \quad (2.128)$$

Дискретный случайный процесс $e_{\Delta t}[n]$ с корреляционной функцией (2.127) имеет, очевидно, спектральную плотность

$$F_*(z) = c\sigma^2 [F(z) - a],$$

где $F(z)$ определяется формулой (2.69) при $\rho = e^{-\bar{\omega}_*}$. Путем несложных преобразований можно произвести факторизацию спектральной плотности $F_*(z)$, в результате получим

$$F_*(z) = \frac{(a_0 + a_1 z)(a_0 + a_1 z^{-1})}{(1 - \rho z)(1 - \rho z^{-1})}, \quad (2.129)$$

где

$$a_1 = \sqrt{c\sigma^2 \frac{1 - \rho^2 + a(1 + \rho^2) - \sqrt{[1 - \rho^2 + a(1 + \rho^2)]^2 - 4a^2\rho^2}}{2}}; \quad (2.130)$$

$$a_0 = \frac{ac\sigma^2\rho}{a_1}. \quad (2.131)$$

Из формулы (2.129) непосредственно следует выражение для передаточной функции дискретного фильтра, формирующего из дискретного белого шума $x[n]$ с параметрами $(0, 1)$ последовательность значений $e_{\Delta t}[n]$ первой разности моделируемого процесса:

$$K_{e_{\Delta t}}(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 - \rho z}.$$

Поскольку в соответствии с (2.119) передаточная функция фильтра формирующего из значений разности $\varepsilon_{\Delta t}[n]$ значения $\xi[n]$ моделируемого процесса $\xi(t)$, равна

$$K_{\varepsilon_{\Delta t} \xi}(z) = \frac{1}{1-z},$$

то сквозная передаточная функция от $x[n]$ к $\xi[n]$ имеет вид

$$K_{x \xi}(z) = K_{x \varepsilon_{\Delta t}}(z) K_{\varepsilon_{\Delta t} \xi}(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 - (1 + \rho)z + \rho z^2}.$$

Таким образом, приходим к следующему рекуррентному алгоритму формирования дискретных значений $\xi[n]$ случайного процесса со стационарными первыми приращениями и экспоненциальной корреляционной функцией производной [см. (2.124)]:

$$\xi[n] = \varepsilon_{\Delta t}^{(1)}[n] + \xi[n-1],$$

$$\varepsilon_{\Delta t}^{(1)}[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \rho \varepsilon_{\Delta t}^{(1)}[n-1]$$

или

$$[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + (1 + \rho) \xi[n-1] - \rho \xi[n-2], \quad (2.132)$$

где $x[n]$ — дискретный белый шум с параметрами (0, 1); a_0 и a_1 — коэффициенты, определяемые по формулам (2.130), (2.131) и (2.128).

Результаты, полученные из рассмотрения данного примера, будут использованы в четвертой главе.

Пример 2. Рассмотрим моделирование винеровского случайного процесса 1-го порядка. Первая производная его является белым шумом со спектральной плотностью N_0 . Поскольку корреляционная функция производной процесса является δ -функцией

$$R^{(1)}(\tau) = N_0 \delta(\tau),$$

то, очевидно, согласно (2.121)

$$R_{\varepsilon}^{(1)}(\tau, \Delta t) = N_0 h_1(\tau) = \begin{cases} N_0(\Delta t - |\tau|), & |\tau| \leq \Delta t, \\ 0, & |\tau| > \Delta t. \end{cases}$$

Отсюда

$$R_{\varepsilon}^{(1)}[n, 1] = \begin{cases} N_0 \Delta t, & n = 0, \\ 0, & |n| > 0. \end{cases}$$

Как и следовало ожидать, случайный процесс $\varepsilon_{\Delta t}^{(1)}[n]$ является в данном случае дискретным белым шумом с дисперсией $N_0 \Delta t$. Используя это, в соответствии с общим алгоритмом (2.118) получаем следующий алгоритм для формирования дискретных реализаций винеровского случайного процесса 1-го порядка:

$$\xi[n] = \xi[n-1] + \sqrt{N_0 \Delta t} x[n].$$

Пример 3. Найдем параметры рекуррентного алгоритма для моделирования винеровского случайного процесса 2-го порядка. Согласно формуле (2.121), полагая $R_{\epsilon}^{(2)}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$, получим

$$R_{\epsilon}^{(2)}[n, 1] = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(n\Delta t - \theta) h_1(\theta) d\theta =$$

$$= \begin{cases} N_0 \int_{-\Delta t}^{\Delta t} (\Delta t - |\theta|)^2 d\theta = 2N_0 \int_0^{\Delta t} (\Delta t - \theta)^2 d\theta, & n=0, \\ N_0 \int_0^{\Delta t} (\Delta t - \theta)(\theta - \Delta t) d\theta, & |n|=1, \\ 0 & |n|>1. \end{cases} \quad (2.133)$$

После вычисления элементарных интегралов в (2.133) найдем

$$R_{\epsilon}^{(2)}[n, 1] = \begin{cases} \frac{2N_0\Delta t^3}{3}, & n=0, \\ \frac{N_0\Delta t^3}{6}, & |n|=1, \\ 0, & |n|>1. \end{cases} \quad (2.134)$$

Корреляционной функции (2.134) соответствует спектральная плотность дискретного случайного процесса $\epsilon_{\Delta t}^{(2)}$ вида

$$F(z) = \frac{2}{3} N_0 \Delta t^3 \left(1 + \frac{z}{4} + \frac{1}{4z} \right) = N_0 \Delta t^3 |a_0 + a_1 z|^2,$$

где

$$a_0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}; \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Отсюда для формирования последовательности значений $\epsilon_{\Delta t}^{(2)}[n]$ получаем следующее рекуррентное уравнение:

$$\epsilon_{\Delta t}^{(2)}[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1].$$

Окончательно для моделирования винеровского процесса 2-го порядка в соответствии с (2.118) имеем алгоритм

$$\begin{aligned} \xi[n] &= \epsilon_{\Delta t}^{(2)}[n] + 2\xi[n-1] - \xi[n-2] = \\ &= a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + 2\xi[n-1] - \xi[n-2]. \end{aligned}$$

2.11. Моделирование марковских случайных процессов

Важное теоретическое и практическое значение имеют марковские случайные процессы [7, 18].

С точки зрения моделирования на ЦВМ марковские случайные процессы — это одни из наиболее простых процессов. Действительно, марковским называется случайный процесс $\xi(t)$, у которого условная плотность вероятностей $\omega(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1}, \dots, \xi_1, t_1)$ значений $\xi_n = \xi(t_n)$ в произвольный момент времени $t_n > t_{n-1}$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned}\omega(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1}, \dots, \xi_1, t_1) &= \omega(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1}) = \\ &= \omega_0(\xi_n, \xi_{n-1}, t_n, t_{n-1}),\end{aligned}\quad (2.135)$$

т. е. зависит лишь от значения процесса в один из предшествующих моментов времени [78]. Время t может быть как непрерывным, так и дискретным. Условная плотность вероятностей (2.135) называется *плотностью вероятностей перехода* из состояния ξ_{n-1} в момент времени t_{n-1} в состояние ξ_n в момент времени t_n . В общем случае — это функция четырех переменных.

Для моделирования марковского случайного процесса достаточно знать условную плотность вероятностей перехода (2.135) и плотность вероятностей $\omega(\xi_0, t_0)$ начального значения ξ_0 в момент времени t_0 , при этом получение дискретных реализаций процесса сводится, очевидно, к следующему. Формируется реализация ${}^1\xi_0$ случайной величины $\xi^{(1)}$ с функцией плотности $\omega(\xi_0, t_0)$, затем формируется реализация ${}^1\xi_1$ случайной величины ξ_1 с функцией плотности $\omega(\xi_1, t_1 | \xi_0, t_0)$ и т. д. В результате получается последовательность чисел

$${}^1\xi_0 = {}^1\xi(t_0), \quad {}^1\xi_1 = {}^1\xi(t_1), \quad \dots$$

изображающая дискретную реализацию ${}^1\xi(t_n)$ марковского случайного процесса $\xi(t)$ с заданной условной плотностью вероятностей перехода $\omega_0(\xi_n, \xi_{n-1}, t_n, t_{n-1})$. Для получения следующей реализации процесса повторяется та же операция; в результате получается последовательность чисел ${}^2\xi(t_0), {}^2\xi(t_1), \dots$ и т. д.

При моделировании марковских случайных процессов для формирования на ЦВМ случайных чисел с заданным

законом распределения могут быть использованы методы, рассмотренные в § 1.4.

В более общем случае рассматриваются N -мерные марковские процессы, т. е. N взаимосвязанных между собой процессов $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)$, в совокупности обладающих марковскими свойствами. Эти процессы характеризуются условной плотностью вероятностей перехода из состояния $\xi_{1 n-1}, \dots, \xi_{N n-1}$ в момент времени t_{n-1} в состояние $\xi_{1 n}, \dots, \xi_{N n}$ в момент времени t_n , которая имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(\xi_{1 n}, \dots, \xi_{N n}, t_n | \xi_{1 n-1}, \dots, \xi_{N n-1}, t_{n-1}) = \\ = \omega_0(\xi_{1 n}, \dots, \xi_{N n}, \xi_{1 n-1}, \dots, \xi_{N n-1}, t_n, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.136)$$

Моделирование N -мерных марковских процессов по заданной условной плотности вероятностей перехода (2.136) в принципе не отличается от моделирования рассмотренных выше одномерных (простейших) марковских процессов, однако получение N -мерных дискретных реализаций с ростом N усложняется, так как на каждом шаге требуется формировать реализации N -мерных случайных векторов. Последнее, как было показано в § 1.5, вообще говоря, является непростой задачей.

Другим обобщением одномерных марковских процессов являются одномерные марковские процессы N -го порядка, отличающиеся от простейших марковских процессов тем, что плотность вероятностей перехода в очередное состояние зависит не от одного, а от N предшествующих состояний. Показано [78], что марковский процесс N -го порядка можно рассматривать как компоненту N -мерного марковского процесса, поэтому моделирование марковских процессов N -го порядка может быть сведено к моделированию N -мерных марковских процессов.

Выше шла речь о моделировании марковских процессов общего вида: на характеристики процессов не накладывалось других ограничений, кроме указанных выше. В приложениях распространенными являются марковские процессы, которые удовлетворяют дополнительным условиям, чаще всего, условию нормальности распределения, стационарности (однородности), а также условию нормальности и стационарности одновременно.

В этих случаях моделирование марковских процессов упрощается.

Действительно, у стационарных марковских случайных процессов плотность вероятностей перехода вида (2.135) и (2.136) зависит лишь от разности $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$. Это упрощает процесс моделирования (в особенности для одномерных марковских процессов), так как уменьшается число аргументов функции $\omega_0(\xi_n, \xi_{n-1}, t_n, t_{n-1})$, которую требуется хранить в памяти ЦВМ при моделировании. Число аргументов при переменном шаге дискретизации уменьшается на одну, а при постоянном — на две единицы. Функция ω_0 имеет в этих случаях вид $\omega_0(\xi_n, \xi_{n-1}, \Delta t_n)$ и $\omega_0(\xi_n, \xi_{n-1}, \Delta t)$ соответственно, где $\Delta t = \text{const}$.

При моделировании нормальных марковских процессов, у которых плотности вероятностей перехода вида (2.135) и (2.136) являются нормальными, на каждом шаге требуется формировать реализации только нормальных случайных величин (одномерных или N -мерных соответственно), что осуществляется, как было показано в первой главе, сравнительно просто.

Можно показать [78], что нормальные марковские процессы N -го порядка являются нормальными случайными процессами, k -е производные которых стационарны и имеют рациональный спектр (см. § 2.10), а при $k=0$ — просто стационарными нормальными случайными процессами с рациональным спектром.

Методы моделирования таких процессов по их корреляционно-спектральным характеристикам были рассмотрены в § 2.3; 2.4; 2.6; 2.9; 2.10. В частности, марковским стационарным нормальным процессом 1-го порядка является экспоненциально-коррелированный процесс, который неоднократно упоминался выше (§ 2.3, пример 2; § 2.6, табл. 2.2, № 1 и др.). Этим единственным процессом и исчерпывается класс марковских стационарных нормальных процессов 1-го порядка [78]. К марковским стационарным нормальным процессам относятся процессы № 2—5 в табл. 1.2, § 2.6 (процессы 2-го порядка). Три примера марковских нормальных нестационарных процессов рассмотрены в § 2.10 (случайный процесс со стационарной экспоненциально-коррелированной первой производной и винеровские процессы 1-го и 2-го порядка). Вопросы моделирования марковских стационарных

нормальных случайных процессов N -го порядка с переменным шагом рассмотрены в работе [66].

Специальным классом марковских случайных процессов являются *марковские цепи* [7]. Они отличаются от рассмотренных выше марковских процессов тем, что множество возможных состояний их является дискретным и, в частности, конечным (конечные цепи Маркова).

Марковские цепи характеризуются матрицей вероятностей перехода

$$\| P_{ik}(t_n, t_{n-1}) \| \begin{matrix} k=1, 2, \dots \\ i=1, 2, \dots \end{matrix} \quad (2.137)$$

из состояния $\xi_i(t_{n-1})$ в момент времени t_{n-1} в состояние $\xi_k(t_n)$ в момент времени t_n , где ξ_i — величина с дискретным множеством значений ξ_1, ξ_2, \dots .

Моделирование марковских цепей по заданной матрице вероятностей перехода (2.137) в принципе осуществляется так же, как и моделирование марковских процессов по заданной условной плотности вероятностей перехода. Отличие состоит только в том, что вместо реализаций непрерывных случайных величин на каждом шаге требуется формировать реализации дискретных случайных величин (с бесконечным или конечным множеством значений).

2.12. Моделирование случайных потоков

Потоки событий, происходящих в случайные моменты времени $t_1, t_2 > t_1, \dots, t_n > t_{n-1}, \dots$, являются специфичным классом случайных процессов. Случайные потоки широко используются в качестве математических моделей в задачах, связанных с исследованием систем массового обслуживания [10, 39], в задачах приема импульсных сигналов [6, 73], в задачах надежности [89] и т. п.

Возможны различные эквивалентные способы задания случайных потоков [6, 39]. Наиболее удобным для моделирования способом задания потоков общего вида является задание их с помощью многомерной плотности вероятностей интервалов между моментами наступления событий

$$\omega(\tau_1, \dots, \tau_n), \quad (2.138)$$

где $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $t_0 = 0$.

При таком задании случайных потоков моделирование их в общем случае сводится, очевидно, к формированию на ЦВМ реализаций случайных векторов $\|\tau_k\|_{k=1, n}$ с законом распределения (2.138), для чего могут быть использованы методы, описанные в § 1.5, 1.6. Моменты наступления событий получаются при этом по простой рекуррентной формуле

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k.$$

Случайные потоки столь общего вида встречаются в приложениях весьма редко. Обычно рассматриваются так называемые *потоки с ограниченным последствием* [39], у которых интервалы τ_1, \dots, τ_n между событиями статистически независимы в совокупности, т. е.

$$w(\tau_1, \dots, \tau_n) = w_1(\tau_1) w_2(\tau_2) \dots w_n(\tau_n).$$

Эти потоки задаются последовательностью одномерных законов распределения $w_k(\tau)$, $k=1, 2, \dots$

Потоки с ограниченным последствием, у которых $w_2(\tau) = w_3(\tau) = \dots = w_n(\tau) = w(\tau)$, называются *рекуррентными (стационарными) потоками*. Они задаются двумя законами распределения $w_1(\tau)$ и $w(\tau)$.

Потоки, у которых $w_1(\tau) = w(\tau)$, определяются единственным законом распределения $w(\tau)$ и называются просто рекуррентными (стационарными) потоками [39]. К таким потокам относится, в частности, широко распространенный *пуассоновский (простейший) поток*, у которого закон распределения интервалов между событиями показательный

$$w(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}, \quad \tau \geq 0. \quad (2.139)$$

Видим, что потоки с ограниченным последствием в соответствии с терминологией § 1.1 являются непосредственно заданными случайными процессами, поэтому моделирование их является довольно простой задачей.

Действительно, для получения реализаций последовательности моментов наступления событий t_k , $k=1, 2, \dots$, в этих случаях достаточно сформировать последовательность реализаций τ_k , $k=1, 2, \dots$, случайных величин с заданными законами распределения $w_k(\tau)$ соответственно и вычислить моменты наступления событий по формуле $t_k = t_{k-1} + \tau_k$. Моделирование рекуррентных потоков упрощается еще и тем, что случайные величины τ_k (кро-

ме, может быть, τ_1) имеют одинаковый закон распределения. Для формирования на ЦВМ реализаций случайных величин с заданными законами распределения можно использовать методы, рассмотренные в § 1.4. В частности, при моделировании пуассоновского потока реализации случайных величин τ_k с показательным законом распределения (2.139) можно получать с помощью алгоритма (см. § 1.4)

$$\tau_k = -\frac{1}{\lambda} \ln x_k,$$

где x_k — независимые случайные числа, равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$.

Таковы методологические основы моделирования случайных потоков. Более подробные сведения о моделировании потоков и конкретные примеры моделирующих алгоритмов имеются, например, в [10].

2.13. Моделирование случайных полей

Случайными полями называются случайные функции многих переменных [71]. В дальнейшем будут рассматриваться четыре переменные: координаты x, y, z , определяющие положение точки в пространстве, и время t . Случайное поле будет обозначаться как $\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(x, y, z, t)^*$. Случайные поля могут быть *скалярными* (одномерными) и *векторными* (N_1 -мерными).

В общем случае скалярное поле $\xi(\mathbf{r}, t)$ задается совокупностью своих N -мерных распределений

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_N) d\xi_1 \dots d\xi_N = P \{ \xi_v \leq \xi(\mathbf{r}_v, t_v) < \xi_v + d\xi_v \},$$

$$v = \overline{1, N},$$

а векторное поле $\|\xi_k(\mathbf{r}, t)\|_{k = \overline{1, N_1}}$ — совокупностью своих $N \times N_1$ -мерных распределений

$$\omega(\xi_{11}, \dots, \xi_{1N_1}; \xi_{21}, \dots, \xi_{2N_1}; \dots; \xi_{N_11}, \dots, \xi_{N_1N_1}) d\xi_{11} \dots d\xi_{N_1N_1} =$$

$$= P \{ \xi_{kv} \leq \xi_k(\mathbf{r}_v, t_v) < \xi_{kv} + d\xi_{kv} \}_{k = \overline{1, N_1}, v = \overline{1, N}}.$$

* В этом параграфе векторы обозначаются так, как это принято в векторной алгебре. Такое обозначение в теории полей является более привычным и наглядным, чем матричное обозначение.

Если статистические характеристики поля не изменяются при изменении начала отсчета времени, т. е. они зависят только от разности $\tau = t_2 - t_1$, то такое поле называется *стационарным*. Если перенос начала координат не влияет на статистические характеристики поля, т. е. они зависят только от разности $\rho = r_2 - r_1$, то такое поле называется *однородным* по пространству. Однородное поле *изотропно*, если его статистические характеристики не изменяются при изменении направления вектора $\rho = r_2 - r_1$, т. е. зависят лишь от длины $\rho = |\rho|$ этого вектора.

Примерами случайных полей являются электромагнитное поле при распространении электромагнитной волны в статистически неоднородной среде, в частности электромагнитное поле сигнала, отраженного от флюктуирующей цели (это, вообще говоря, векторное случайное поле); объемные диаграммы направленности антенн и диаграммы вторичного излучения целей, на формирование которых оказывают влияние случайные параметры; статистически неровные поверхности, в частности земная поверхность и поверхность моря при волнениях, и ряд других примеров.

В данном параграфе рассматриваются некоторые вопросы моделирования случайных полей на ЦВМ. Как и ранее, под задачей моделирования понимается разработка алгоритмов для формирования на ЦВМ дискретных реализаций поля, т. е. совокупностей выборочных значений поля

$$\xi(\mathbf{r}_m, t_n) = \xi(x_i, y_j, z_k, t_n),$$

где $\mathbf{r}_m = (x_i, y_j, z_k)$ — дискретная пространственная координата; t_n — дискретное время.

При этом полагается, что исходными при моделировании случайного поля являются независимые случайные числа. Совокупность таких чисел будет рассматриваться как случайное *δ -коррелированное поле*, называемое в дальнейшем *δ -полем*. Случайное δ -поле — это элементарное обобщение дискретного белого шума на случай нескольких переменных. Моделирование δ -поля на ЦВМ осуществляется весьма просто: пространственно-временной координате (\mathbf{r}_m, t_n) ставится в соответствие выборочное значение $x_s(\mathbf{r}_m, t_n)$ числа из датчика нормальных случайных чисел с параметрами $(0, 1)$.

Задача цифрового моделирования случайных полей является новой в общей проблеме разработки системы эффективных алгоритмов для имитации различного рода случайных функций, ориентированной на решение статистических задач радиотехники, радиофизики, акустики и т. д. методом моделирования на ЦВМ.

В самом общем виде, если известен N или $N \times N_1$ -мерный закон распределения, случайное поле можно моделировать на ЦВМ как случайный N или $N \times N_1$ -мерный вектор, используя приведенные в первой главе алгоритмы. Однако ясно, что этот путь даже при сравнительно небольшом числе дискретных точек по каждой координате является очень сложным. Например, моделирование плоского (не зависящего от z) скалярного случайного поля в 10 дискретных точках по координатам x и y и для 10 моментов времени сводится к формированию на ЦВМ реализаций 1000-мерного случайного вектора.

Упрощения алгоритма и сокращения объема вычислений можно достичь, если, подобно тому, как это было сделано по отношению к случайным процессам, разрабатывать алгоритмы для моделирования специальных классов случайных полей.

Рассмотрим возможные алгоритмы моделирования стационарных однородных скалярных нормальных случайных полей. Случайные поля этого класса так же, как и стационарные нормальные случайные процессы, играют очень важную роль в приложениях [71]. Такие поля полностью задаются своими *пространственно-временными корреляционными функциями*

$$R_{ij}(\rho, \tau) = M \{ \xi(\mathbf{r}, \tau) \xi(\mathbf{r} + \rho, t + \tau) \}.$$

(Здесь и в дальнейшем предполагается, что среднее значение поля равно нулю.)

Столь же полной характеристикой рассматриваемого класса случайных полей является *функция спектральной плотности поля* $G(\mathbf{s}, \omega)$, представляющая собой четырехмерное преобразование Фурье от корреляционной функции $R(\rho, \tau)$ (обобщение теоремы Винера—Хинчина [71]):

$$G(\mathbf{s}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\rho, \tau) e^{-j(\mathbf{s}\rho + \omega\tau)} d\rho d\tau,$$

где $\mathbf{s}\rho$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ и $\rho = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$; $d\rho = d\rho_x d\rho_y d\rho_z$. При этом

$$R(\rho, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(s, \omega) e^{j(s\rho + \omega\tau)} ds d\omega.$$

Функция спектральной плотности $G(s, \omega)$ случайного поля и энергетический спектр $G(\omega)$ стационарного случайного процесса имеют аналогичный смысл, а именно: если случайное поле $\xi(r, t)$ представить в виде суперпозиции пространственно-временных гармоник со сплошным спектром частот, то интенсивность их (суммарная дисперсия амплитуд) в полосе частот $(\omega, \omega + d\omega)$ и полосе пространственных частот $(s, s + ds)$ равна $G(s, \omega) ds d\omega$.

Случайное поле с интенсивностью $G(s, \omega) ds d\omega$ можно получить из случайного поля $\xi(r, t)$, имеющего спектральную плотность $G(s, \omega)$, если пропустить поле $\xi(r, t)$ через пространственно-временной фильтр с коэффициентом передачи, равным единице в полосе $(\omega, \omega + d\omega)$, $(s, s + ds)$ и равным нулю вне этой полосы.

Пространственно-временные фильтры (ПВФ) являются обобщением обычных (временных) фильтров. Линейные ПВФ, как и обычные фильтры, описываются с помощью импульсной переходной характеристики [87]

$$h(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(js, j\omega) e^{j(sr + \omega t)} ds d\omega$$

и передаточной функции

$$K(js, j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(r, t) e^{-j(sr + \omega t)} ds d\omega.$$

Процесс линейной пространственно-временной фильтрации поля $\xi_1(r, t)$ можно записать в виде четырехмерной свертки:

$$\begin{aligned} \xi_2(r, t) &= \xi_1(r, t) * h(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(r - \rho, t - \tau) h(\rho, \tau) d\rho d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(\rho, \tau) h(r - \rho, t - \tau) d\rho d\tau, \end{aligned} \quad (2.140)$$

где $\xi_2(r, t)$ — поле на выходе ПВФ с импульсной переходной характеристикой $h(r, t)$. При этом

$$G_2(s, \omega) = G_1(s, \omega) |K(js, j\omega)|^2, \quad (2.141)$$

$$R_2(\rho, \tau) = R_1(\rho, \tau) * h(\rho, \tau) * h(-\rho, -\tau), \quad (2.142)$$

где $G_1(s, \omega)$, $G_2(s, \omega)$, $R_1(\rho, \tau)$, $R_2(\rho, \tau)$ — функции спектральной плотности и корреляционные функции полей на входе и на выходе ПВФ соответственно.

Доказательство соотношений (2.141), (2.142) полностью совпадает с доказательством аналогичных соотношений для стационарных случайных процессов.

Аналогия гармонического разложения и фильтрации случайных полей с гармоническим разложением и фильтрацией случайных процессов позволяет предложить для их моделирования аналогичные алгоритмы.

Пусть требуется построить алгоритмы для моделирования на ЦВМ стационарного однородного по пространству скалярного нормального поля $\xi(\mathbf{r}, t)$ с заданной корреляционной функцией $R(\rho, \tau)$ или функцией спектральной плотности $G(\mathbf{s}, \omega)$.

Если поле $\xi(\mathbf{r}, t)$ задано в конечном пространстве, ограниченном пределами $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$, $0 \leq z \leq Z$, и рассматривается на конечном интервале времени $(0, T)$, то для формирования на ЦВМ дискретных реализаций этого поля можно использовать алгоритм, основанный на каноническом разложении поля в *пространственно-временной ряд Фурье* и являющийся обобщением алгоритма (1.31):

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{r}_m, t_n) = & \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\mathbf{s}_1 \mathbf{r}_m + k\omega_1 t_n) + \\ & + B_k \sin(k\mathbf{s}_1 \mathbf{r}_m + k\omega_1 t_n). \end{aligned} \quad (2.143)$$

Здесь A_k и B_k — случайные независимые между собой нормально распределенные числа с параметрами $(0, \sigma_k^2)$ каждое, причем дисперсии σ_k^2 определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 = & \frac{1}{TXYZ} \int_0^T \int_0^R R(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r} d\tau = \\ = & \frac{1}{TXYZ} \int_0^X \int_0^Y \int_0^Z \int_0^T R(x, y, z, \tau) dx dy dz d\tau; \end{aligned} \quad (2.144)$$

$$\sigma_k^2 = \frac{2}{TXYZ} \int_0^T \int_0^R R(\mathbf{r}, \tau) \cos(k\mathbf{s}_1 \mathbf{r} + k\omega_1 \tau) d\mathbf{r} d\tau, \quad k=1, 2, \dots,$$

где $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ — вектор, изображающий предел интегрирования по пространству; $k\mathbf{s}_1 = \left(\frac{k\pi}{X}, \frac{k\pi}{Y}, \frac{k\pi}{Z} \right)$, $k\omega_1 = \frac{k\pi}{T}$ — дискретные частоты гармоник, по которым производится

каноническое разложение корреляционной функции в пространственно-временной ряд Фурье.

Если область разложения поля во много раз больше его пространственно-временного интервала корреляции, то дисперсии легко выражаются через спектральную функцию поля (см. § 1.6, п. 3)

$$\sigma_0^2 = \frac{G(0, 0)}{2TXYZ}, \quad \sigma_k^2 = \frac{G(k\mathbf{s}_1, k\omega_1)}{TXYZ}, \quad k=1, 2, \dots \quad (2.145)$$

Формирование дискретных реализаций $\xi(\mathbf{r}_m, t_n)$ при моделировании случайных полей по данному методу осуществляется путем непосредственного вычисления их значений по формуле (2.143), в которой в качестве A_k и B_k берутся выборочные значения нормальных случайных чисел с параметрами $(0, \sigma_k^2)$, при этом бесконечный ряд (2.143) приближенно заменяется усеченным рядом. Дисперсии σ_k^2 вычисляются предварительно по формулам (2.144) или (2.145).

Рассмотренный алгоритм хотя и не позволяет формировать реализации случайного поля, неограниченные по пространству и по времени, однако подготовительная работа для его получения довольно простая, в особенности при использовании формул (2.145), и этот алгоритм позволяет формировать дискретные значения поля в произвольных точках пространства и времени выбранной области. При формировании дискретных реализаций поля с постоянным шагом по одной или нескольким координатам для сокращенного вычисления тригонометрических функций целесообразно использовать рекуррентный алгоритм вида (1.3).

Неограниченные дискретные реализации однородного стационарного случайного поля можно формировать с помощью алгоритмов *пространственно-временного скользящего суммирования* δ -поля, аналогичных алгоритмам скользящего суммирования для моделирования случайных процессов. Если $h(\mathbf{r}, t)$ — импульсная переходная характеристика ПВФ, формирующего из δ -поля поле с заданной функцией спектральной плотности $G(\mathbf{s}, \omega)$ (функцию $h(\mathbf{r}, t)$, можно получить путем четырехмерной трансформации Фурье функции $\sqrt{G(\mathbf{s}, \omega)}$, см. § 2.2, п. 2), то, подвергая процесс пространственно-временной

фильтрации δ -поля дискретизации, получим

$$\xi[i, j, k, n] = \Delta r \Delta t \sum_p \sum_q \sum_l \sum_m h[p, q, l, m] \times \\ \times x_\delta[i-p, j-q, k-l, n-m], \quad (2.146)$$

где $\Delta r \Delta t = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ — константа, определяемая выбором шага дискретизации по всем переменным x, y, z, t ; $x_\delta[i, j, k, m]$ — дискретное δ -поле.

Суммирование в формуле (2.146) осуществляется по всем значениям p, q, l, m , при которых слагаемые не являются пренебрежимо малыми или равными нулю.

Подготовительная работа при данном методе моделирования заключается в нахождении соответствующей весовой функции $h(\mathbf{r}, t)$ пространственно-временного формирующего фильтра.

Подготовительная работа и процесс суммирования в алгоритме (2.146) упрощаются, если функцию $h(x, y, z, t)$ можно представить в виде произведения

$$h(x, y, z, t) = h_1(x) h_2(y) h_3(z) h_4(t). \quad (2.147)$$

В этом случае, как это следует из (2.144), корреляционная функция поля является произведением вида

$$R(x, y, z, \tau) = R_1(x) R_2(y) R_3(z) R_4(\tau), \quad (2.148)$$

где $R_k(u) = h_k(u) * h_k(-u)$, $k = \overline{1, 4}$.

Если разложение корреляционной функции на множители вида (2.148) в строгом смысле невыполнимо, его можно сделать с некоторой степенью приближения, в частности, положив

$$R(x, y, z, \tau) = R(x, 0, 0, 0) R(0, y, 0, 0) \times \\ \times R(0, 0, z, 0) R(0, 0, 0, \tau). \quad (2.149)$$

При разложении на произведение (2.149) пространственных корреляционных функций изотропных случайных полей, у которых $R(\rho, \tau) = R(\rho, \tau)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, частичные корреляционные функции $R_1(x)$, $R_2(y)$ и $R_3(z)$ будут, очевидно, одинаковыми. При этом, ввиду приближенности формулы (2.149), пространственная корреляционная

функция $R_*(x, y, z) = R_1(x)R_2(y)R_3(z)$ будет соответствовать, вообще говоря, некоторому неизотропному случайному полю. Так, например, если $R(\rho)$ является экспоненциальной функцией вида

$$R(\rho) = R(x, y, z) = e^{-|\rho|} = e^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (2.150)$$

то согласно (2.149) $R_1(x) = e^{-|x|}$, $R_2(y) = e^{-|y|}$, $R_3(z) = e^{-|z|}$. В этом случае заданная корреляционная функция $R(\rho)$ аппроксимируется корреляционной функцией

$$R_*(x, y, z) = e^{-(|x| + |y| + |z|)}. \quad (2.151)$$

Случайное поле с корреляционной функцией (2.151) неизотропно. Действительно, если у поля с корреляционной функцией (2.150) поверхность постоянной корреляции (геометрическое место точек пространства, в которых значения поля имеют одинаковую корреляцию со значением поля в некоторой произвольной фиксированной точке пространства) является сферой, то в случае (2.151) поверхность постоянной корреляции есть поверхность куба, вписанного в указанную сферу. (Максимальное расстояние между этими поверхностями может служить мерой погрешности аппроксимации).

Примером, в котором разложение (2.149) является точным, может служить корреляционная функция вида

$$\begin{aligned} R(x, y, z) &= e^{-(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)} = \\ &= e^{-a^2x^2} e^{-b^2y^2} e^{-c^2z^2}. \end{aligned}$$

Разложение (2.149) позволяет свести довольно сложный процесс четырехкратного суммирования в алгоритме (2.146) к повторному применению однократного скользящего суммирования.

Таковы основные принципы моделирования нормальных однородных стационарных случайных полей. Моделирование ненормальных однородных стационарных полей с заданным одномерным законом распределения можно осуществить путем соответствующего нелинейного преобразования нормальных однородных стационарных полей, используя методы, рассмотренные в § 2.7.

Пример 1. Пусть импульсная переходная характеристика пространственного фильтра для формирования плоского скалярного постоянного во времени поля имеет вид

$$h(x, y) = e^{-(ax+by)} = e^{-ax}e^{-by}, \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi[i, j] &= \Delta x \Delta y \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} e^{-\bar{a}p} e^{-\bar{b}q} x_{\delta}[i-p, j-q] = \\ &= \Delta x \Delta y \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\bar{a}p} \sum_{q=0}^{\infty} e^{-\bar{b}q} x_{\delta}[i-p, j-q] = \\ &= \Delta x \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\bar{a}p} X_{\delta}[i-p, j], \end{aligned}$$

где Δx и Δy — шаги дискретизации по переменным x и y соответственно; $\bar{a} = a\Delta x$, $\bar{b} = b\Delta y$;

$$X_{\delta}[i, j] = \Delta y \sum_{q=0}^{\infty} e^{-\bar{b}q} x_{\delta}[i, j-q].$$

Из полученных формул видно, что для получения дискретных реализаций плоского поля можно сначала с помощью скользящего суммирования с весовой функцией $h_2[q] = \Delta y e^{-\bar{b}q}$ сформировать совокупности независимых дискретных реализаций $X_{\delta}[i, j]$ случайного процесса с корреляционной функцией $R_2(x) = h_2(x) * h_2(-x)$, где i — номер реализации в совокупности, j — номер дискреты в совокупности, а затем с помощью скользящего суммирования этих реализаций по индексу i с весовой функцией $h_1[p] = \Delta x e^{-\bar{a}p}$ сформировать дискретные реализации поля. Процесс такого двукратного сглаживания δ -поля поясняет рис. 2.11.

В рассматриваемом примере процесс скользящего суммирования легко сводится к вычислению в соответствии с рекуррентными формулами (§ 2.3)

$$X_{\delta}[i, j] = \Delta y x_{\delta}[i, j] + e^{-\bar{b}} X_{\delta}[i, j-1],$$

$$\xi[i, j] = \Delta x X_{\delta}[i, j] + e^{-\bar{a}} \xi[i-1, j].$$

Этот пример допускает обобщения. Во-первых, аналогичным образом, очевидно, можно формировать реализации более сложных полей, чем плоское, постоянное во времени поле. Во-вторых, пример подсказывает возможность применения рекуррентных алгоритмов для моделирования случайных полей. Действительно, если импульсную переходную характеристику ПФФ, формирующего из δ -поля поле с заданной корреляционной функцией, представить как произведение вида (2.151), то, как

было показано, формирование реализаций поля сводится к повторному применению алгоритмов для моделирования стационарных случайных процессов с корреляционными функциями $R_k(u)$, $k=1,4$. Эти алгоритмы могут быть сделаны рекуррентными, если корреляционные функции $R_k(u)$, $k=1,4$, имеют вид (2.50) (случайные процессы с рациональным спектром).

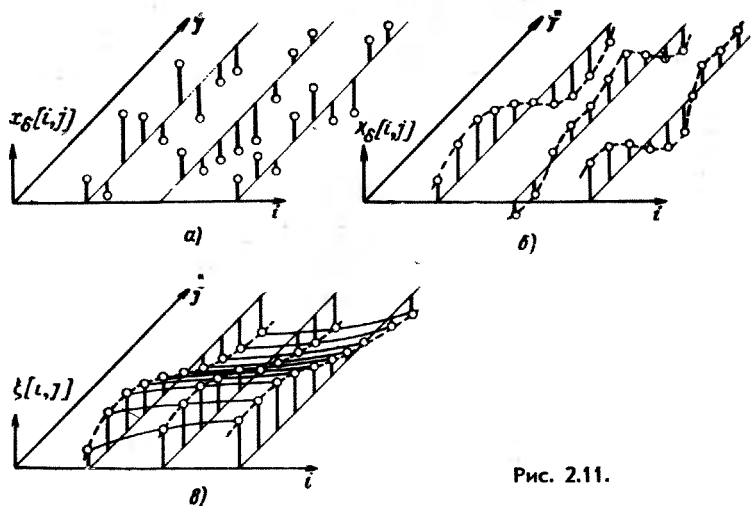


Рис. 2.11.

В заключение следует заметить, что в этом параграфе были рассмотрены только основные принципы цифрового моделирования случайных полей и даны некоторые возможные моделирующие алгоритмы. Целый ряд вопросов остался незатронутым, например: моделирование векторных (в частности, комплексных), нестационарных, неоднородных, ненормальных случайных полей; вопросы нахождения весовой функции пространственно-временного формирующего фильтра по заданным корреляционно-спектральным характеристикам поля (в частности, возможность применения метода факторизации для многомерных спектральных функций); примеры применения цифровых моделей случайных полей при решении конкретных задач и т. д.

Изложение этих вопросов выходит за рамки данной книги. Многие из них являются предметом будущих исследований.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ
И ПОМЕХ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

3.1. Введение

При решении радиотехнических задач методами моделирования на ЦВМ наряду с моделированием радиосигналов и радиопомех возникает необходимость в построении цифровых моделей процессов преобразования сигналов и помех различными линейными и нелинейными радиосистемами. Задача при этом заключается в нахождении алгоритмов, позволяющих получать на ЦВМ дискретные значения $v[n]=v(n\Delta t)$ процесса $v(t)$ на выходе данной системы по известным дискретным значениям $u[n]=u(n\Delta t)$ входного процесса и известным характеристикам системы, например передаточным функциям и характеристикам нелинейности его отдельных звеньев. Основными требованиями к таким алгоритмам являются минимальный объем вычислений при реализации их на ЦВМ и простота подготовительной работы к моделированию. Эти алгоритмы в дальнейшем называются цифровыми моделями радиосистем.

В целом ряде практических задач блок-схемы исследуемых радиосистем можно представить в виде соединения двух основных типов звеньев: линейных инерционных (динамических) звеньев (усилители, фильтры, следящие системы и т. д.) и нелинейных безынерционных звеньев (детекторы, ограничители, логические устройства и т. д.). Причем во многих случаях можно полагать, что между звеньями системы имеется *развязка*, так что свойства каждого звена практически не изменяются при присоединении к нему других звеньев, если это специально не предусмотрено. Из двух названных типов функциональных единиц можно строить линейные и нелинейные радиосистемы любой сложности путем наращивания блок-схемы. Такие системы в дальнейшем называются *функциональными*. Разбиение функциональной системы

на отдельные звенья обычно не является предметом самостоятельного исследования, так как обычно оно задано; это облегчает задачу моделирования.

Процесс прохождения сигналов и помех со входа на выход функциональных радиосистем состоит из ряда отдельных преобразований сигналов и помех звеньями систем. В соответствии с этим моделирующий алгоритм для всей системы можно найти, зная моделирующие алгоритмы для отдельных звеньев.

Последнее наиболее просто осуществляется при моделировании разомкнутых систем, содержащих только последовательно включенные звенья. Моделирующие алгоритмы для таких систем получаются путем суперпозиции (типа «функция от функции») алгоритмов, моделирующих отдельные звенья систем. Выходной сигнал в этих случаях выражается в явном виде через входной сигнал.

Более сложной является задача моделирования замкнутых нелинейных функциональных систем, содержащих один или несколько контуров обратной связи. Алгоритмы, описывающие функционирование замкнутых систем в целом, также получаются путем соответствующей комбинации алгоритмов, описывающих отдельные звенья систем, но при этом выходной сигнал, вообще говоря, не выражается в явном виде через входное воздействие. Значения выходного сигнала при моделировании замкнутых нелинейных систем могут быть найдены путем решения на каждом шаге нелинейных алгебраических уравнений. Однако это затруднение, как будет показано ниже, во многих случаях можно обойти путем введения в цепи обратной связи элемента запаздывания на величину шага дискретизации. При этом моделирование замкнутых нелинейных функциональных систем принципиально не отличается от моделирования разомкнутых систем.

В данной главе рассматриваются вопросы цифрового моделирования линейных динамических звеньев (или систем в целом, если эти системы линейны), нелинейных безынерционных звеньев и нелинейных систем, содержащих линейные динамические и нелинейные безынерционные звенья. Моделирование последних рассматривается как при отсутствии, так и при наличии замкнутых контуров.

В этой главе основное внимание уделено задаче цифрового моделирования непрерывных систем как наиболее сложной и важной задаче.

Импульсные системы можно рассматривать как разновидность непрерывных систем, у которых воздействия прерываются во времени (чаще всего периодически). Поэтому для моделирования импульсных систем, в особенности тех, у которых интервалы между воздействиями (импульсами) соизмеримы с длительностями импульсов (системы с малой скважностью или квазинепрерывные системы), можно применять те же методы, что и для моделирования непрерывных систем.

Задача моделирования так называемых *амплитудно-импульсных систем 1-го рода* [85], у которых информация заключена лишь в амплитудах импульсных сигналов, является, по существу, упрощенным вариантом задачи моделирования непрерывных систем, когда задан шаг дискретизации и *метод дискретной аппроксимации* (см. § 3.2, п. 2, § 3.3).

Какие-либо специальные методы моделирования импульсных систем в этой главе не рассматриваются.

3.2. Цифровые модели непрерывных линейных динамических систем, основанные на дискретной свертке

Рассмотрим непрерывную линейную динамическую систему с постоянными параметрами. В качестве основных характеристик системы обычно используются передаточная функция $K(p)$ в смысле преобразования Лапласа и импульсная переходная характеристика $h(t)$, представляющая собой реакцию системы на δ -функцию. В общем случае функции $K(p)$ и $h(t)$ являются, как известно, парой функций, сопряженных по Лапласу:

$$\begin{aligned} K(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-pt} dt, \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} K(p) e^{pt} dp. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если функция $h(t)$ абсолютно интегрируема, то характеристики $K(p)$ и $h(t)$ связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2)$$

Формулы (3.2) являются частным случаем формул (3.1).

Для того чтобы при нулевых начальных условиях определить реакцию линейной системы на сигнал произвольного вида, достаточно иметь характеристики $K(p)$ или $h(t)$.

При моделировании в качестве основной характеристики линейной системы удобно использовать импульсную переходную характеристику $h(t)$, с помощью которой можно довольно просто выразить сигнал $v(t)$ на выходе системы через входной сигнал $u(t)$:

$$v(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (3.3)$$

Согласно формуле (3.3) сигнал на выходе линейной системы является результатом скользящего интегрирования входного сигнала с весовой функцией $h(t)$. Формула (3.3) называется, как известно, интегралом Дюамеля, а также формулой свертки. В дальнейшем будет использоваться последний термин.

В формуле (3.3) предполагается, что подынтегральные функции заданы на всей оси, при этом они могут быть неограниченными и ограниченными во времени. В последнем случае значения функций вне области задания полагаются тождественно равными нулю.

При различных односторонних и двусторонних ограничениях во времени функций $u(t)$ и $h(t)$ пределы интегрирования можно уточнить. В наиболее распространенных частных случаях ограничений по времени формула (3.3), как нетрудно показать, имеет следующий вид.

1. Сигнал $u(t)$ неограничен во времени. Функция $h(t)$ имеет одностороннее ограничение: $h(t) \equiv 0$ при $t < 0$ (это условие всегда имеет место для физически осуществимых линейных систем),

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau. \quad (3.4)$$

2. Сигнал $u(t)$ неограничен во времени. Функция $h(t)$ имеет двустороннее ограничение: $h(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и $t > T$,

$$v(t) = \int_{t-T}^t u(\tau) h(t-\tau) n\tau = \int_0^T h(\tau) u(t-\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

3. Функции $u(t)$ и $h(t)$ имеют одностороннее ограничение: $u(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и $h(t) \equiv 0$ при $t < 0$,

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \int_0^t u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau, & t > 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

4. Сигнал $u(t)$ имеет двустороннее ограничение: $u(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и при $t > T$, функция $h(t)$ ограничена с одной стороны: $h(t) \equiv 0$ при $t < 0$,

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \int_0^t u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau, & 0 \leq t \leq T, \\ \int_0^T u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{t-T}^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau, & t > T. \end{cases} \quad (3.7)$$

5. Функции $u(t)$ и $h(t)$ имеют одинаковое двустороннее ограничение: $u(t) \equiv h(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и при $t > T$,

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \int_0^t u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau, & 0 \leq t \leq T, \\ \int_{t-T}^t u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{t-T}^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau, & T \leq t \leq 2T, \\ 0, & t > 2T. \end{cases} \quad (3.8)$$

Формула (3.8) используется, например, при анализе прохождения импульсного сигнала через согласованный с ним оптимальный фильтр [88].

Выражения (3.4)—(3.8) представляют собой непрерывные математические модели линейных динамических систем с постоянными параметрами. Одним из принципов получения цифровых моделей непрерывных систем является переход от уравнений (3.3)—(3.8) к соответствующим дискретным эквивалентам. Рассмотрим методы дискретизации этих уравнений.

1. Дискретизация с использованием формул численного интегрирования

Наиболее простым по своей идее способом получения цифровых моделей непрерывных систем является замена интегралов вида (3.3)—(3.8) соответствующими суммами. Для замены интегралов суммами существует большое количество методов (методы численного интегрирования).

Рассмотрим применение формул численного интегрирования на примере выражения (3.5), когда функция $h(t)$ имеет двустороннее ограничение (функцию $h(t)$, неограниченную вправо, можно приближенно заменить ограниченной, если $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Дискретные значения сигнала на выходе системы в точках $t_n = n\Delta t$ равны

$$v[n] = \int_0^T h(\tau) u(n\Delta t - \tau) d\tau.$$

Пусть дискретный входной сигнал $u[n] = u(n\Delta t)$ задан с тем же шагом Δt и пусть Δt в целое число раз меньше T , т. е. $T/\Delta t = N$. При достаточно малом Δt последовательность $v[n]$ проще всего найти, заменяя интеграл суммой по способу прямоугольников, основанному на замене подынтегральной функции ступенчатой кривой:

$$v[n] \approx v_*[n] = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} h[k] u[n-k], \quad (3.9)$$

где $h[k] = h(k\Delta t)$ — дискретная импульсная переходная характеристика.

Аналогично осуществляется дискретизация и других уравнений (3.4)—(3.8). Например, уравнению (3.4) соответствует следующий дискретный эквивалент:

$$v_*[n] = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} h[k] u[n-k]. \quad (3.10)$$

Согласно алгоритму (3.9) преобразование дискретного входного процесса $u[n]$ в дискретный выходной процесс $v[n]$ осуществляется путем скользящего суммирования первого с весовой функцией $a[k] = \Delta t h[k]$, равной с точностью до множителя Δt дискретной импульсной

переходной характеристике системы, другими словами, путем дискретной свертки функций $u[n]$ и $a[n]=\Delta th[n]$.

Существует ряд других методов численного интегрирования, более точных по сравнению со способом прямоугольников (см., например, [3]). Из них часто применяются метод трапеций и метод Симпсона (формула парабол). При использовании метода трапеций формулы (3.9) и (3.10) имеют соответственно вид

$$v_*[n] = \sum_{k=0}^N c[k] h[k] u[n-k], \quad (3.11)$$

$$v_*[n] = \sum_{k=0}^n c[k] h[k] u[n-k], \quad (3.12)$$

где

$$c[k] = \frac{\Delta t}{2} c_0[k], \quad c_0[k] = 1, 2, 2, \dots, 2, 2, 1.$$

При использовании метода Симпсона нужно выбрать параметр N четным и вычисления производить по формуле

$$v_*[n] = \sum_{k=0}^N c[k] h[k] u[n-k], \quad (3.13)$$

где

$$c[k] = \frac{\Delta t}{3} c_0[k], \quad c_0[k] = 1, 4, 2, 4, \dots, 2, 4, 1.$$

В общем случае применение методов численного интегрирования сводится к различному выбору коэффициентов $c[k]$. Это относится и к методу прямоугольников, для которого согласно (3.9)

$$c[k] = \Delta t c_0[k], \quad c_0[k] = 1, 1, \dots, 1, 1, 0,$$

т. е. все $c_0[k]$, кроме последнего, равны единице; последний коэффициент равен нулю.

В задачах, не требующих большой точности решения, удобно использовать формулу прямоугольников как наиболее простую. Погрешность интерполяции систем по способу прямоугольников будет оценена ниже. Как было показано в § 2.2, п. 2, аппроксимация по способу прямоугольников не сопровождается погрешностью, если функции $u(t)$ и $h(t)$ имеют спектры, ограниченные частото-

той $\omega_c = \pi/\Delta t$, что соответствует случаю, когда спектр входного сигнала и полоса пропускания системы строго ограничены частотой ω_c , а шаг дискретизации Δt выбран в соответствии с теоремой Котельникова.

Следует заметить, что если подынтегральная функция на концах интервала интегрирования обращается в нуль, например при $h[0]=h[N]=0$, формула прямоугольников и формула трапеций дают совершенно одинаковый результат. Такой вывод с очевидностью следует из формул (3.9) и (3.11).

Формулы (3.9)—(3.13) описывают поведение некоторых дискретных линейных фильтров (см. § 2.1). Передаточные функции этих фильтров, определяемые как отношение z -преобразования дискретного выходного сигнала $v_*[n]$ к z -преобразованию дискретного входного сигнала $u[n]$ имеют вид [85]:

$$K_*(z) = \frac{D\{v_*[n]\}}{D\{u[n]\}} = \sum_{k=0}^{\infty} c[k] h[k] z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a[k] z^k \quad (3.14)$$

при одностороннем ограничении,

$$K_*(z) = \frac{D\{v_*[n]\}}{D\{u[n]\}} = \sum_{k=0}^N c[k] h[k] z^k = \sum_{k=0}^N a[k] z^k \quad (3.15)$$

при двустороннем ограничении по времени импульсной переходной характеристики системы.

Формулы (3.14), (3.15) непосредственно получаются из формул (3.9)—(3.13), если z^k рассматривать как оператор задержки последовательности $u[n]$ на k периодов. Отсюда следует, что передаточные функции $K_*(z)$ являются z -преобразованием от весовой функции $a[k]$, представляющей собой последовательность значений импульсной переходной характеристики системы с весом $c[k]$.

Структурная схема дискретного фильтра с передаточной функцией (3.15) изображена на рис. 2.1 (если заменить $x[n]$, $c[k]$, $\xi[n]$ на $u[n]$, $a[k]$, $v_*[n]$ соответственно). Согласно этой схеме последовательность дискретных значений входного сигнала поступает на линию задержки с N отводами, задержка между которыми равна Δt . К отводам подключены весовые усилители с коэффициентами усиления $a[k] = c[k] h[k]$. Для образования ди-

скретного сигнала на выходе системы выходы весовых усилителей суммируются.

Процесс дискретной фильтрации по схеме рис. 2.1 можно легко реализовать на ЦВМ в виде стандартной программы, входными параметрами которой являются N и $a[k]$, $k=1, N$. Коэффициенты $a[k]$ должны быть вычислены заранее. Значения их при выбранном Δt определяются дискретной импульсной переходной характеристикой системы и выбранным способом численного интегрирования. В простейшем случае $a[k]=\Delta t h[k]$. Линию задержки можно имитировать на ЦВМ, используя операцию пересылки содержимого ячеек оперативной памяти, хранящих текущие значения входного сигнала от $u[n]$ до $u[n-N]$.

Вычисления по схеме рис. 2.1 можно производить также с помощью готовой стандартной операции перемножения матриц. Действительно, пусть входной дискретный сигнал $u[n]$, $n=0, N$, и дискретная импульсная переходная характеристика системы $h[n]$, $n=0, N$, причем $N+1 \leq N_1+1$ ограничены во времени. Тогда, очевидно, выходной дискретный сигнал будет последовательностью из $N_2=N_1+N+1$ чисел, которая удовлетворяет следующему матричному равенству:

$$\begin{pmatrix} v[0] \\ v[1] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v[N_1+N-1] \\ v[N_1+N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u[0] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u[1] & u[0] & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u[N] & u[N-1] & \dots & u[1] & u[0] \\ u[N+1] & u[N] & \dots & u[2] & u[1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u[N_1] & u[N_1-1] & \dots & u[N_1-N-1] & u[N_1-N] \\ 0 & u[N_1] & \dots & u[N_1-N-2] & u[N_1-N-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u[N_1] & u[N_1-1] \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u[N_1] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a[0] \\ a[1] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a[N-1] \\ a[N] \end{pmatrix}$$

где $a[n]=c[n]h[n]$, $n=0, N$. (3.16)

Запись матриц для случая $N_1 < N$ аналогична.

В выражении (3.16) матрица порядка $(N+1) \times (N+N_1+1)$, составленная из элементов $u[n]$, $n=0, N_1$, формируется следующим образом: каждая строка полу-

чается из предыдущей строки сдвигом на один элемент вправо. Так, например, если $N_1=N_2=2$, то матричная запись будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} v[0] \\ v[1] \\ v[2] \\ v[3] \\ v[4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u[0] & 0 & 0 \\ u[1] & u[0] & 0 \\ u[2] & u[1] & u[0] \\ 0 & u[2] & u[1] \\ 0 & 0 & u[2] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a[0] \\ a[1] \\ a[2] \end{pmatrix}.$$

В изложенной процедуре замены непрерывной системы эквивалентной дискретной системой использован косвенный путь, основанный на применении методов численного интегрирования к интегралам свертки (3.4) — (3.8). Дискретный фильтр, приближенно заменяющий непрерывный фильтр, можно получить также несколькими путями: непосредственно из рассмотрения импульсной системы, эквивалентной непрерывной системе.

2. Дискретизация по методу замены непрерывных систем эквивалентными импульсными системами

На рис. 3.1 показан пример линейной системы (а) и ее импульсного эквивалента (б). Импульсная система работает следующим образом [85].

Входной сигнал $u(t)$ подается на *импульсный элемент* (ИЭ), который превращает его в последовательность импульсов, следующих с периодом повторения Δt , равным шагу дискретизации, и промодулированных по амплитуде сигналом $u(t)$, т. е.

$$u_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] k_0(t - n\Delta t),$$

где $k_0(t)$ — функция, описывающая форму импульса.

Импульсный элемент можно представить в виде последовательного соединения *простейшего импульсного элемента*, преобразующего сигнал $u(t)$ в модулированную последовательность мгновенных импульсов (δ -функций) вида

$$u_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t) \delta(t - n\Delta t)$$

и интерполирующего фильтра (ИФ), представляющего собой линейную непрерывную систему с импульсной переходной характеристикой $k_0(t)$ (рис. 3.1, в). Выбирая шаг дискретизации Δt и функцию $k_0(t)$, можно с достаточной точностью аппроксимировать непрерывную функцию $u(t)$ функцией $u_*(t)$ (см. § 1.7). На рис. 1.5 показаны примеры ступенчатой аппроксимации функции

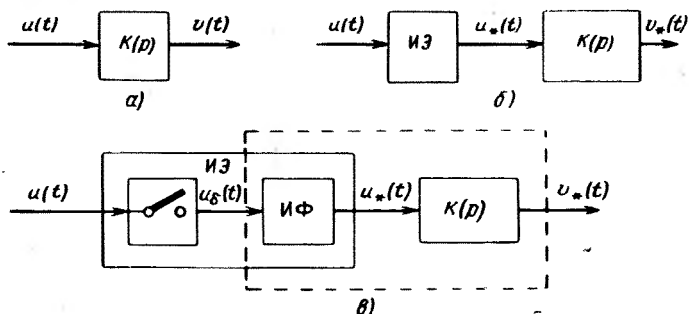


Рис. 3.1.

$u(t)$ и аппроксимации ее отрезками прямых (линейная интерполяция в точках $t_n = n\Delta t$). В первом случае импульсная переходная характеристика интерполирующего фильтра представляет собой прямоугольный импульс с единичной амплитудой длительностью Δt , а во втором — симметричный импульс треугольной формы с единичной амплитудой длительностью $2\Delta t$. Аналитические выражения импульсных переходных характеристик для этих случаев приведены в табл. 1.1.

При других более точных видах интерполяции, например при квадратичной интерполяции, форма импульсной переходной характеристики интерполирующего фильтра будет более сложной [49].

Интерполирующий фильтр и система с передаточной функцией $K(p)$ образуют так называемую *приведенную непрерывную часть* [85] (на рис. 3.1 показана пунктиром). Импульсная переходная характеристика приведенной непрерывной части, как нетрудно видеть, равна свертке функций $k_0(t)$ и $h(t)$:

$$h_*(t) = k_0(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_0(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

где $h(t)$ — импульсная переходная характеристика непрерывной системы. Поскольку приведенная непрерывная часть находится под воздействием δ -импульсов, сигнал $v_*(t)$ на выходе импульсной системы можно представить в виде

$$v_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] h_*(t - n\Delta t).$$

В дискретных точках $t_n = n\Delta t$ выходной сигнал импульсной системы равен

$$v_*[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] h_*[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_*[k] u[n - k], \quad (3.17)$$

т. е. последовательность дискретных значений выходного сигнала выражается в виде дискретной свертки последовательности значений входного сигнала и дискретной импульсной переходной характеристики $h_*[k]$ приведенной непрерывной части. :

Суммирование в формуле (3.17) распространяется на всю область существования дискретных значений, стоящих под знаком суммы. В частном случае, когда $u(t) \equiv k_0(t) \equiv h(t) \equiv 0, t < 0$, формула (3.17) запишется в виде

$$v_*[n] = \sum_{k=0}^n h_*[k] u[n - k]. \quad (3.18)$$

Если, кроме того, импульсная переходная характеристика приведенной непрерывной части ограничена справа, т. е. имеет конечную длительность, равную T , то

$$v_*[n] = \sum_{k=0}^N h_*[k] u[n - k], \quad N = \frac{T}{\Delta t}. \quad (3.19)$$

Передаточные функции дискретных фильтров, описываемых формулами (3.18) и (3.19), имеют соответственно вид

$$K_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_*[k] z^k, \quad (3.20)$$

$$K_*(z) = \sum_{k=0}^N h_*[k] z^k. \quad (3.21)$$

Структурная схема дискретного фильтра с передаточной функцией (3.20) будет такой же, как и схема фильтра, представленного на рис. 2.1, если в ней заменить коэффициенты $c[k]$ на $h_*[k]$.

Подготовительная работа к моделированию при использовании алгоритмов дискретной свертки рассмотренного типа сложнее подготовительной работы при использовании алгоритмов дискретной свертки, основанных на методах численного интегрирования, так как по заданной импульсной переходной характеристике системы требуется еще находить импульсную переходную характеристику $h_*[k]$ приведенной непрерывной части, задавшись формой импульсной переходной характеристики $k_0(t)$ интерполирующего фильтра.

Наиболее просто функция $h_*(t)$ находится в случае, когда интерполирующий фильтр представляет собой просто безынерционный усилитель с коэффициентом передачи, равным Δt (непрерывный входной сигнал $u(t)$ заменяется при этом модулированной последовательностью δ -функций с огибающей $\Delta t u[n]$), а именно $h_*(t) = \Delta t h(t)$.

Тогда согласно (3.18)

$$v_*[n] = \Delta t \sum_{k=0}^n h[k] u[n-k]. \quad (3.22)$$

Сравнивая (3.22) с (3.10), убеждаемся, что такая же дискретная свертка получается из непрерывной свертки при использовании метода прямоугольников.

Дискретная аппроксимация непрерывных систем по принципу замены их эквивалентными импульсными системами имеет самостоятельное значение при получении рекуррентных моделирующих алгоритмов (§ 3.3).

3. Применение к системам с переменными параметрами

Одним из преимуществ метода цифрового моделирования линейных динамических систем, основанного на дискретизации непрерывной свертки, является возможность простого обобщения его на случай моделирования линейных систем с переменными параметрами (нестационарных во времени систем).

Связь вход — выход в системах с переменными параметрами, как известно, можно задать с помощью им-

пульсной переходной характеристики $h(t, \tau)$, зависящей от двух переменных и описывающей реакцию системы на δ -функцию, поданную на вход в момент времени t , где t — текущее время, τ — время, прошедшее с момента подачи δ -импульса [45]. На рис. 3.2 дан пример реакции

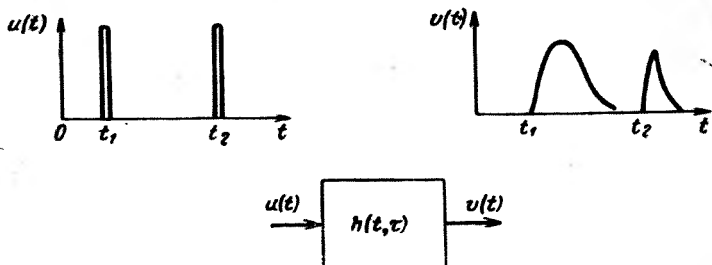


Рис. 3.2.

системы с переменными параметрами на импульсное воздействие, поданное в моменты времени t_1 и $t_2 > t_1$. При таком определении импульсной переходной характеристики нестационарной системы реакция ее на сигнал $u(t)$ запишется в виде

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(\tau, t - \tau) d\tau.$$

В дискретной форме

$$v_*[n] = \sum_k u[k] h[k, n - k] c[n - k],$$

или

$$v_*[n] = \sum_k u[k] h_*[k, n - k],$$

где $c[k]$ — коэффициенты, зависящие от метода численного интегрирования; $h_*(t, \tau)$ — импульсная переходная характеристика приведенной непрерывной части нестационарной системы.

Таким образом, цифровые модели нестационарных линейных систем, основанные на дискретной свертке, представляют собой формулы скользящего суммирования с переменным весом (весом, зависящим от текущего значения дискретного времени).

4. Заключительные замечания

Рассмотренные выше методы моделирования, использующие дискретную свертку, удобны в тех случаях, когда известна (или легко находится) импульсная переходная характеристика линейной системы (функция Грина дифференциального уравнения, связывающего входной и выходной процессы).

Метод дискретной свертки одинаково успешно может быть применен для цифрового моделирования линейных систем как с постоянными (сосредоточенными и распределенными), так и с переменными параметрами.

Недостатком метода дискретной свертки является относительно большой объем вычислений. Действительно, если импульсная переходная характеристика системы имеет ограниченную длительность (или допускает ограничение), то для получения одного значения выходного сигнала требуется произвести, как это следует, например, из (3.9), $2N$ элементарных операций: N умножений и N сложений, не считая операций пересылки. При большом отношении длительности импульсной переходной характеристики к шагу дискретизации число N велико, что и приводит к большим вычислительным затратам.

Если же импульсную переходную характеристику нельзя аппроксимировать ограниченной, то объем вычислений на одну дискрету выходного сигнала растет пропорционально ее номеру n [см. формулу (3.18)].

Другим распространенным методом описания радиосистем является частотный метод (метод Фурье). При использовании этого метода для цифрового моделирования линейных систем требуется произвести три основные операции: 1) численное преобразование Фурье входного сигнала (задание входного сигнала в виде суперпозиции гармоник; 2) умножение спектра входного сигнала на частотную характеристику системы $K(j\omega)$ (изменение амплитуд и фаз входных гармоник в соответствии с амплитудно- и фазо-частотной характеристиками системы); 3) обратное преобразование Фурье спектра выходного сигнала (суммирование выходных гармоник).

Частотный метод цифрового моделирования обычно требует значительных вычислений. Однако в последнее

время Кули и Таки [100] предложили алгоритм так называемого «быстрого» преобразования Фурье на ЦВМ. Применение этого алгоритма позволяет существенно сократить объем вычислений при прямом и обратном преобразованиях Фурье дискретного сигнала, что в некоторых случаях делает частотный метод цифрового моделирования более экономичным, чем метод дискретной свертки.

На практике широкое распространение имеют линейные системы, которые можно считать системами с постоянными сосредоточенными параметрами. При цифровом моделировании систем этого класса значительную (для систем невысокого порядка весьма значительную) экономию вычислительных затрат дает применение разностных рекуррентных методов. Эти методы являются *усовершенствованными методами численного интегрирования* дифференциальных уравнений [29]. Вначале эти методы, используемые в основном для исследования дискретных линейных систем, были применены для численного анализа переходных процессов в непрерывных системах автоматического регулирования.

Впоследствии они оказались эффективными методами цифрового моделирования динамических систем и были подвергнуты некоторой модернизации; в частности, автором эти методы были распространены на случай цифрового моделирования избирательных высокочастотных радиосистем, описываемых по методу огибающих [17]. Разностные методы цифрового моделирования динамических систем рассмотрены ниже.

3.3. Моделирование линейных непрерывных динамических систем с помощью рекуррентных разностных уравнений

Сущность разностных методов [85] состоит в замене процессов в непрерывных линейных системах процессами в эквивалентных импульсных линейных системах, поведение которых можно описать довольно простыми рекуррентными соотношениями (уравнениями в конечных разностях). Математическим аппаратом при этом служит дискретное преобразование Лапласа (z -преобразование).

Как было показано в § 3.2 [см. формулы (3.20), (3.21)], передаточная функция $K_*(z)$ эквивалентной им-

пульсной системы в смысле дискретного преобразования Лапласа является z -преобразованием от импульсной переходной характеристики $h_*(t)$ приведенной непрерывной части, т. е.

$$K_*(z) = D \{h_*[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} h_*[n] z^n.$$

Для линейных систем с постоянными сосредоточенными параметрами дискретные передаточные функции эквивалентных импульсных систем обычно удается найти в замкнутой форме в виде дробно-рациональной функции [85]

$$K_*(z) = \frac{\sum_{k=0}^l a_k z^k}{1 + \sum_{k=1}^m b_k z^k} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_l z^l}{1 + b_1 z + \dots + b_m z^m}. \quad (3.23)$$

Структурная схема дискретного фильтра с передаточной функцией (3.23) показана на рис. 2.2.

Производя идентификацию передаточной функции (3.23), приходим к следующему рекуррентному алгоритму формирования дискретных значений выходного сигнала:

$$\begin{aligned} v_*[n] &= a_0 u[n] + \dots + a_l u[n-l] - \\ &- b_1 v_*[n-1] - \dots - b_m v_*[n-m]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Полученное уравнение во многих случаях значительно сокращает вычисления по сравнению с формулами дискретного свертывания, что показано на приведенных ниже примерах.

К настоящему времени предложено большое количество методов аппроксимации передаточной функции $K(p)$ непрерывной динамической системы дробно-рациональной дискретной передаточной функцией $K_*(z)$. Выражения для $K_*(z)$ в этих методах получаются непосредственно из рассмотрения различных способов интерполяции входного сигнала, а также другими путями.

Описания методов дискретной аппроксимации непрерывных систем в том или ином виде приводятся, кроме первоисточников, также в работах [49, 63, 85, 109].

Ниже дается систематизированное изложение основных методов дискретной аппроксимации в принятых в данной книге обозначениях и с рациональными выводами формул. Менее перспективные методы вынесены в петит. Сравнительная характеристика методов дана в заключительном пункте этого параграфа.

1. Метод z -преобразования

Входной сигнал $u(t)$, действующий на линейную систему с передаточной функцией $K(p)$, при достаточно малом шаге дискретизации можно приближенно заменить модулированной последовательностью δ -функций с огибающей $\Delta t u[n]$ и периодом Δt . Это в схеме рис. 3.1 соответствует выбору в качестве интерполирующего фильтра безынерционного усилителя с коэффициентом усиления $k_0 = \Delta t$, т. е. выбору для аппроксимации входного сигнала $u(t)$ функции

$$u_*(t) = \Delta t u[n] \delta(t - n\Delta t).$$

При таком виде интерполяции импульсная переходная характеристика приведенной непрерывной части, как уже отмечалось в § 2.3, с точностью до множителя Δt совпадает с импульсной переходной характеристикой непрерывной системы. Следовательно, дискретная передаточная функция $K_*(z)$ эквивалентной импульсной системы равна z -преобразованию дискретной импульсной переходной характеристики непрерывной системы, умноженному на Δt :

$$K_*(z) = \Delta t D \{h[n]\} = \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^n, \quad z = e^{-q}. \quad (3.25)$$

(отсюда и название метода).

Импульсную переходную характеристику непрерывной системы с постоянными сосредоточенными параметрами, у которой передаточная функция

$$K(p) = \frac{K_1(p)}{K_2(p)} = \frac{A_0 + A_1 p + \dots + A_l p^l}{B_0 + B_1 p + \dots + B_m p^m} \quad (3.26)$$

имеет в общем случае $s + 1$ различных полюсов p_ν , $\nu = \overline{0, s}$ (корни уравнения $K_2(p) = 0$) кратности r_ν каждый, так что $r_0 + \dots + r_s = m$, согласно известной теореме разложения (см., например, [41]), можно представить в виде

$$h(t) = \sum_{\nu=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_\nu-1} C_{\nu\mu} \frac{t^\mu}{\mu!} e^{p_\nu t}, \quad (3.27)$$

где

$$C_{\nu\mu} = \frac{1}{(r_\nu - \mu - 1)!} \frac{d^{r_\nu - \mu - 1}}{d p^{r_\nu - \mu - 1}} [K(p) (p - p_\nu)^{r_\nu}] \Big|_{p=p_\nu}. \quad (3.28)$$

В дальнейшем положим $p_0 = 0$.

Из (3.27) следует

$$h[n] = \sum_{\nu=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_{\nu}-1} C_{\nu\mu} \Delta t^{\mu} \frac{n}{\mu!} e^{q_{\nu} n}, \quad (3.29)$$

где $q_{\nu} = p_{\nu} \Delta t$.

Подставляя разложение (3.29) в формулу (3.25) и используя свойство линейности z -преобразования, получим

$$\begin{aligned} K_{*}(z) &= \sum_{\nu=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_{\nu}-1} \frac{C_{\nu\mu} \Delta t^{\mu+1}}{\mu!} D \{n^{\mu+1} e^{q_{\nu} n}\} = \\ &= \sum_{\nu=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_{\nu}-1} \frac{C_{\nu\mu} \Delta t^{\mu+1}}{\mu!} K_{\nu\mu}(z). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Передаточную функцию $K_{\nu\mu}(z)$ (z -преобразование от $n^{\mu} e^{q_{\nu} n}$) можно найти по таблицам дискретного преобразования Лапласа [85] или же, поскольку

$$n^{\mu} e^{q_{\nu} n} = \frac{d^{\mu}}{dq_{\nu}^{\mu}} e^{q_{\nu} n},$$

то на основании теоремы дифференцирования z -преобразования по параметру [85] можно записать

$$K_{\nu\mu}(z) = \frac{d^{\mu}}{dq_{\nu}^{\mu}} D \{e^{q_{\nu} n}\} = \frac{d^{\mu}}{dq_{\nu}^{\mu}} \frac{1}{1 - e^{q_{\nu} z}}. \quad (3.31)$$

В частности, при $\mu = 0, 5$ выражения для $K_{\nu\mu}(z)$ приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

μ	$K_{\nu\mu}(z)$
0	$1/(1 - p_{\nu} z), p_{\nu} = e^{q_{\nu}} = e^{p_{\nu} \Delta t}$
1	$p_{\nu} z / (1 - p_{\nu} z)^2$
2	$p_{\nu} z (1 + p_{\nu} z) / (1 - p_{\nu} z)^3$
3	$p_{\nu} z (1 + 4p_{\nu} z + p_{\nu}^2 z^2) / (1 - p_{\nu} z)^4$
4	$p_{\nu} z (1 + 11p_{\nu} z + 11p_{\nu}^2 z^2 + p_{\nu}^3 z^3) / (1 - p_{\nu} z)^5$
5	$p_{\nu} z (1 + 26p_{\nu} z + 66p_{\nu}^2 z^2 + 26p_{\nu}^3 z^3 + p_{\nu}^4 z^4) / (1 - p_{\nu} z)^6$

Итак, окончательное выражение для $K_*(z)$ по методу z -преобразования дается следующей общей формулой:

$$K_*(z) = \sum_{v=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_v-1} \frac{C_{v\mu} \Delta t^{\mu+1}}{\mu!} \frac{d^\mu}{dq_v^\mu} \frac{1}{1 - e^{q_v} z}, \quad (3.32)$$

где $q_v = p_v \Delta t$ — нормированные значения полюсов передаточной функции системы, а коэффициенты $C_{v\mu}$ определяются по (3.28).

При отсутствии кратных полюсов у передаточной функции системы формула (3.27) для импульсной переходной характеристики является суперпозицией экспонент:

$$h(t) = \sum_{v=0}^{m-1} \bar{C}_{v0} e^{p_v t}, \quad (3.33)$$

где

$$\bar{C}_{v0} = [K(p)(p - p_v)]_{p=p_v}. \quad (3.34)$$

В соответствии с этим формула (3.32) переходит в формулу

$$K_*(z) = \sum_{v=0}^{m-1} \bar{C}_{v0} K_{v0}(z) = \sum_{v=0}^{m-1} \bar{C}_{v0} \frac{1}{1 - \rho_v z}, \quad (3.35)$$

где

$$\bar{C}_{v0} = C_{v0} \Delta t, \quad \rho_v = e^{q_v}. \quad (3.36)$$

Нулевой полюс передаточной функции с простыми полюсами (если такой имеется) можно выделить особо, тогда

$$K(p) = \frac{1}{p} K_0(p),$$

$$h(t) = K_0(0) + \sum_{v=1}^{m-1} C_{v0} e^{p_v t}. \quad (3.37)$$

$$K_*(z) = \frac{K_0(0)}{1-z} + \sum_{v=1}^{m-1} \frac{\bar{C}_{v0}}{1 - \rho_v z}. \quad (3.38)$$

Если полюсы p_v , $v = \overline{1, m}$, передаточной функции простые и ни один из них не равен нулю, то формула (3.38) принимает вид

$$K_*(z) = \sum_{v=1}^m \bar{C}_{v0} K_{v0}(z) = \sum_{v=1}^m \frac{\bar{C}_{v0}}{1 - \rho_v z}.$$

2. Метод Цыпкина—Гольденберга [86]

Метод основан на ступенчатой интерполяции входного сигнала с помощью интерполирующего фильтра с импульсной переходной характеристикой вида (рис. 1.5,а)

$$k'_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \Delta t, \\ 0, & t < 0, t > \Delta t. \end{cases} \quad (3.39)$$

Наиболее простым путем для нахождения общего выражения для передаточной функции $K_*(z)$ эквивалентной импульсной системы в этом случае является следующий. Возьмем в качестве входного сигнала $u(t)$ единичную ступеньку, т. е. положим

$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Интерполяция такого сигнала по его дискретным значениям

$$u[n] = u(n\Delta t) = 1[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

с помощью интерполирующего фильтра с импульсной переходной характеристикой (3.39) осуществляется, очевидно, точно:

$$\begin{aligned} u_*(t) &= \sum u[n] k'_0(t - n\Delta t) = \\ &= \sum_n 1[n] k'_0(t - n\Delta t) = 1(t) = u(t). \end{aligned}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае реакции на единичную ступеньку непрерывной системы и эквивалентной импульсной системы в точности совпадают:

$$v_*(t) = v(t).$$

Нетрудно найти общие выражения для этих реакций, зная полюсы передаточной функции $K(p)$. Действительно, поскольку изображение по Лапласу единичной ступеньки есть $1/p$, то изображение реакции $v(t)$ равно

$$\frac{1}{p} K(p) = \frac{1}{p} \frac{K_1(p)}{K_2(p)} = \frac{1}{p} \frac{A_0 + A_1 p + \dots + A_l p^l}{B_0 + B_1 p + \dots + B_m p^m}.$$

Отсюда вытекает, что функция $v(t)$ определяется формулой (3.27), если в ней число нулевых полюсов положить на единицу больше (за счет множителя $1/p$ перед $K(p)$), т. е.

$$v(t) = \sum_{\nu=0}^s \sum_{\mu=0}^{r'_{\nu}-1} \frac{C'_{\nu\mu}}{\mu!} t^{\mu} e^{p_{\nu}t}, \quad (3.40)$$

где

$$r'_{\nu} = \begin{cases} r_{\nu} + 1, & \nu = 0, \\ r_{\nu}, & \nu = \overline{1, s}, \end{cases} \quad \sum_{\nu=0}^s r'_{\nu} = m + 1;$$

m — степень полинома $K_2(p)$;

$$C'_{\nu\mu} = \frac{1}{(r'_{\nu} - \mu - 1)!} \frac{d^{r'_{\nu} - \mu - 1}}{dp^{r'_{\nu} - \mu - 1}} \left[\frac{1}{p} K(p) (p - p_{\nu})^{r'_{\nu}} \right] \Big|_{p=p_{\nu}}; \quad (3.41)$$

p_{ν} , $\nu = \overline{0, s}$, — полюсы передаточной функции $K(p)$ кратности r_{ν} каждый, причем $p_0 = 0$.

Передаточная функция $K_*(z)$ равна отношению z -преобразования $v[n]$ к z -преобразованию $1[n]$. Поскольку

$$D\{1[n]\} = \frac{1}{1-z},$$

а z -преобразование $v[n]$ дается формулой (3.30) при $r_{\nu} = r'_{\nu}$ и $C_{\nu\mu} = C'_{\nu\mu}$ [сравни (3.40) и (3.27)], то окончательно получим

$$K_*(z) = \sum_{\nu=0}^s \sum_{\mu=0}^{r'_{\nu}-1} \frac{C'_{\nu\mu} \Delta t^{\mu}}{\mu!} (1-z) K_{\nu\mu}(z), \quad (3.42)$$

$$K_{\nu\mu}(z) = \frac{d^{\mu}}{dq^{\mu}} \frac{1}{1 - e^{q_{\nu}z}}.$$

Выражения для $K_{\nu\mu}(z)$ при $\mu = \overline{0, 5}$ даны в табл. 3.1.

Если полюсы p_{ν} , $\nu = \overline{1, m}$, передаточной функции $K(p)$ простые и ни один из них не равен нулю, то выходной

сигнал $v(t)$ согласно (3.37) можно записать в виде

$$v(t) = K(0) + \sum_{\nu=1}^m C_{\nu 0} e^{p_{\nu} t},$$

где

$$C_{\nu 0} = \left[\frac{1}{p} K(p) (p - p_{\nu}) \right] \Big|_{p=p_{\nu}}.$$

z-преобразование от этой функции имеет вид

$$D\{v[n]\} = \frac{K(0)}{1-z} + \sum_{\nu=1}^m C_{\nu 0} \frac{1}{1 - e^{q_{\nu} z}}.$$

Следовательно, дискретная передаточная функция $K_*(z)$ по методу Цыпкина — Гольденберга в этом случае равна

$$K_*(z) = K(0) + \sum_{\nu=1}^m C_{\nu 0} \frac{1-z}{1 - e^{q_{\nu} z}}. \quad (3.43)$$

3. Метод Рагаззини — Бергена

В основу метода [104] положена линейная интерполяция входного сигнала с помощью интерполирующего фильтра с импульсной переходной характеристикой вида (рис. 1.5, в)

$$k''_0(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\Delta t}, & |t| \leq \Delta t, \\ 0, & |t| > \Delta t \end{cases} \quad (3.44)$$

Для нахождения передаточной функции $K_*(z)$ эквивалентной импульсной системы пойдем таким же путем, как и при получении передаточной функции $K_*(z)$ в предыдущем методе.

Возьмем в качестве входного сигнала $u(t)$ линейную функцию

$$u(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Интерполяция ее по дискретным точкам

$$u[n] = \Delta t n, \quad n \geq 0,$$

с помощью интерполирующего фильтра с импульсной переходной характеристикой (3.44) осуществляется точно. Изображения входного сигнала в смысле преобразования Лапласа и дискретного преобразования Лапласа соответственно равны

$$L\{u(t)\} = L\{1(t)t\} = \frac{1}{p^2},$$

$$D\{u[n]\} = \Delta t D\{1[n]n\} = \Delta t \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Изображение по Лапласу выходного сигнала $v(t)$ в этом случае

$$L\{v(t)\} = \frac{1}{p^2} K(p) = \frac{1}{p^2} \frac{K_1(p)}{K_2(p)},$$

где $K(p)$ — передаточная функция непрерывной системы.

Отсюда при известных полюсах передаточной функции $K(p)$ общий вид функции $v(t)$ будет определяться формулой (3.27), если число нулевых полюсов в ней положить на два больше (за счет множителя $1/p^2$), т. е.

$$v(t) = \sum_{\nu=0}^s \sum_{\mu=0}^{r''_{\nu}-1} C''_{\nu\mu} \frac{t^{\mu}}{|\mu|!} e^{p_{\nu}t},$$

где

$$r''_{\nu} = \begin{cases} r_{\nu} + 2, & \nu = 0, \\ r_{\nu}, & \nu = \overline{1, s}, \end{cases} \quad \sum_{\nu=0}^s r''_{\nu} = m + 2;$$

m — степень полинома $K_2(p)$;

$$C''_{\nu\mu} = \frac{1}{(r''_{\nu} - \mu - 1)!} \frac{d^{r''_{\nu} - \mu - 1}}{dp^{r''_{\nu} - \mu - 1}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{p^2} K(p) (p - p_{\nu})^{r''_{\nu}} \right] \Big|_{p=p_{\nu}}; \quad (3.45)$$

где p_{ν} , $\nu = \overline{1, s}$, — полюсы передаточной функции $K(p)$ кратности r_{ν} каждый, причем $p_0 = 0$.

Теперь, аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении предыдущего метода, можно сразу записать окончательную общую формулу для дискретной передаточной функции $K_*(z)$ эквивалентной импульс-

ной системы при линейной интерполяции входного сигнала

$$K_{*}(z) = \sum_{v=0}^s \sum_{\mu=0}^{r''_v-1} \frac{C''_{v\mu} \Delta t^{\mu-1}}{[\mu!]} \frac{(1-z)^2}{z} K_{v\mu}(z),$$

$$K_{v\mu}(z) = \frac{d^{\mu}}{dq_v^{\mu}} \frac{1}{1 - e^{q_v} z}. \quad (3.46)$$

Выражения для $K_{v\mu}(z)$ при $v = \overline{0,5}$ помещены в табл. 3.1.

4. Метод, предложенный автором [17]

Метод основан на замене формулы свертки рекуррентным уравнением. Сущность его состоит в следующем.

Выразим сигнал $v(t)$ на выходе системы с помощью формулы свертки

$$v(t) = \int_0^t u(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (3.47)$$

где $u(t)$ — сигнал на входе системы.

Предположим сначала, что полюсы p_v , $v = \overline{0, m-1}$, передаточной функции системы простые, тогда импульсная переходная характеристика системы является суперпозицией экспонент [формула (3.33)]:

$$h(t) = \sum_{v=0}^{m-1} h_v(t), \quad h_v(t) = C_{v0} e^{p_v t}, \quad (3.48)$$

где коэффициенты C_{v0} определяются формулой (3.34).

Разложению (3.48) соответствует разложение выходного сигнала в виде

$$v(t) = \sum_{v=0}^{m-1} v_v(t), \quad v_v(t) = \int_0^t u(\tau) h_v(t - \tau) d\tau. \quad (3.49)$$

Экспоненциальная форма весовой функции $h_v(t)$ в формуле (3.48) позволяет найти простое рекуррентное уравнение для вычисления дискретных значений сигнала $v_v(t)$ (см. § 2.3,

п. 2). Действительно, дискретные значения сигнала $v_v(t)$ в точках $t_n = n\Delta t$ равны

$$v_v[n] = C_{v0} \int_0^{n\Delta t} u(\tau) e^{p_v(n\Delta t - \tau)} d\tau$$

или, после замены τ на $x\Delta t$,

$$v_v[n] = \bar{C}_{v0} \int_0^n u(x) e^{q_v(n-x)} dx, \quad (3.50)$$

где $\bar{C}_{v0} = C_{v0}\Delta t$, $q_v = p_v\Delta t$.

Значение сигнала $v_v[n]$ на k шагов вперед, т. е. в точке $n+k$ равно

$$v_v[n+k] = \bar{C}_{v0} \int_0^{n+k} u(x) e^{q_v(n+k-x)} dx. \quad (3.51)$$

Производя интегрирование в формуле (3.51) в два этапа: сначала по промежутку $(0, n)$, а затем по промежутку $(n, n+k)$, придем к рекуррентной формуле:

$$\begin{aligned} v_v[n+k] &= \bar{C}_{v0} \left[\int_0^n u(x) e^{q_v(n+k-x)} dx + \right. \\ &+ \left. \int_n^{n+k} u(x) e^{q_v(n+k-x)} dx \right] = \bar{C}_{v0} \left[e^{q_v k} \int_0^n u(x) e^{q_v(n-x)} dx + \right. \\ &+ \left. \int_n^{n+k} u(x) e^{q_v(n+k-x)} dx \right] = e^{q_v k} v_v[n] + I_v[n+k], \quad (3.52) \end{aligned}$$

где

$$I_v[n+k] = \bar{C}_{v0} \int_n^{n+k} u(x) e^{q_v(n+k-x)} dx.$$

Положив, в частности, $k=1$ и применив к интегралу $I_v[n+1]$ формулу трапеций с шагом 1, получим

$$v_v[n+1] = \frac{\bar{C}_{v0}}{2} (u[n] e^{q_v} + u[n+1]) + e^{q_v} v_v[n]$$

или

$$v_v[n] = \frac{\bar{C}_{v0}}{2} (u[n] + u[n-1] e^{q_v}) + e^{q_v} v_v[n-1]. \quad (3.53)$$

Дискретные значения $v[n]$ сигнала $v(t)$ согласно (3.49) являются суммой дискретных значений его составляющих $v_\nu(t)$, следовательно,

$$v[n] = \sum_{\nu=0}^{m-1} \left[\frac{\bar{C}_{\nu 0}}{2} (u[n] + e^{q_\nu} u[n-1]) + e^{q_\nu} v_\nu[n-1] \right]. \quad (3.54)$$

Уравнение (3.53) описывает поведение дискретного фильтра с передаточной функцией

$$K_\nu(z) = \frac{\bar{C}_{\nu 0}}{2} \frac{1 + e^{q_\nu} z}{1 - e^{q_\nu} z}. \quad (3.55)$$

Уравнению (3.54) соответствует, очевидно, дискретный фильтр с передаточной функцией в виде суммы передаточных функций $K_\nu(z)$. Поэтому окончательно дискретная передаточная функция $K_*(z)$, аппроксимирующая непрерывную передаточную функцию, имеющую простые полюсы p_ν , $\nu = \overline{0, m-1}$, в рассматриваемом случае дается следующей общей формулой:

$$K_*(z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\bar{C}_{\nu 0}}{2} \frac{1 + e^{q_\nu} z}{1 - e^{q_\nu} z}, \quad (3.56)$$

где

$$\bar{C}_{\nu 0} = C_{\nu 0} \Delta t, \quad C_{\nu 0} = [K(p)(p - p_\nu)]|_{p=p_\nu}, \quad q_\nu = p_\nu \Delta t. \quad (3.57)$$

Если в формуле (3.52) положить $k=2$ и для вычисления интеграла $I_\nu[n+2]$ использовать метод $1/3$ Симпсона [3], то по аналогии с предыдущим получим передаточную функцию $K_*(z)$ в виде

$$K_*(z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} K_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\bar{C}_{\nu 0}}{3} \frac{1 + 4e^{q_\nu} z + e^{2q_\nu} z^2}{1 - e^{2q_\nu} z^2}. \quad (3.58)$$

Увеличивая значение k в формуле (3.52) и используя для вычисления интеграла $I_\nu[n+k]$ более сложные и более точные алгоритмы численного интегрирования, например способ $3/8$ Симпсона при $k=3$, легко можно продолжить отыскание ряда дискретных передаточных функций $K_*(z)$, начатого формулами (3.56) и (3.58).

Данный метод допускает обобщение на случай кратных полюсов, когда импульсную переходную характеристику системы согласно (3.27) можно представить как суперпозицию составляющих вида

$$h_{\nu\mu}(t) = C_{\nu\mu} \frac{t^{\nu-1}}{\mu!} e^{p_{\nu} t}. \quad (3.59)$$

Можно показать, что при использовании этого метода в сочетании со способом трапеций для нахождения передаточных функций $K_{\nu\mu}(z)$, соответствующих непрерывным фильтрам с импульсной переходной характеристикой вида (3.59), получаются результаты, совпадающие при $\mu > 0$ с результатами применения метода z -преобразования. Поэтому рассматриваемый метод при наличии

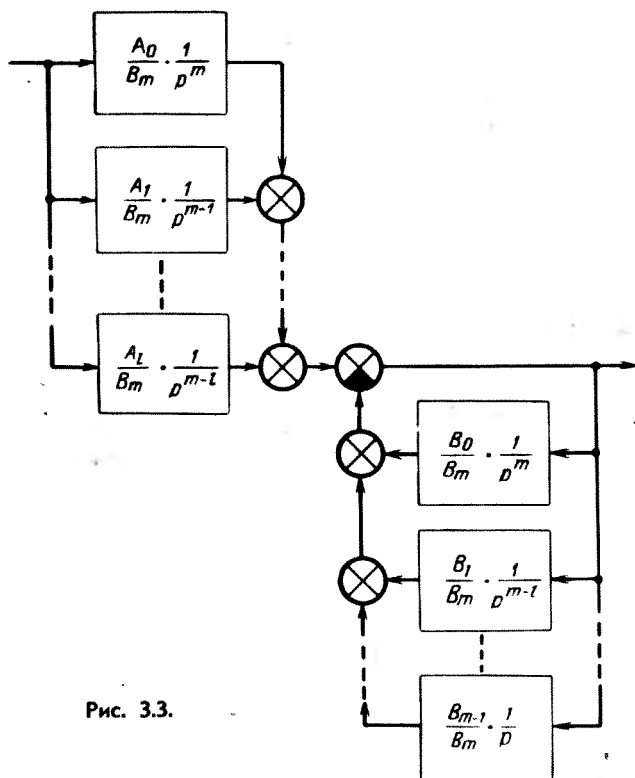


Рис. 3.3.

кратных полюсов можно применять совместно с методом z -преобразования, находя $K_v(z)$ по формулам (3.55) или (3.58), а $K_{v\mu}(z)$, $\mu=1, 2, \dots$,—по формуле (3.31) или по табл. 3.1.

В заключение заметим, что изложенный метод несколько расширен по сравнению с [17].

Прежде чем переходить к характеристике других методов дискретной аппроксимации, необходимо сделать некоторые замечания к перечисленным методам.

Все описанные методы требуют отыскания полюсов передаточной функции $K(p)$, после чего дискретная передаточная функция $K_*(z)$ находится непосредственно по соответствующим формулам. Преобразование ее к дробно-рациональному виду (3.23) осуществляется с помощью простых алгебраических операций (приведение суммы рациональных функций $K_{v\mu}(z)$ к общему знаменателю и приведение подобных членов).

Полюсы передаточных функций систем невысокого порядка отыскиваются легко. При нахождении полюсов для систем высокого порядка встречаются большие трудности. В этих случаях дискретную передаточную

$K(p)$	$K_*(z)$	
	Метод z -преобразования	Метод Цыпкина—Гольденберга
$\frac{1}{p\Delta t}$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{z}{1-z}$
$\frac{1}{p^2\Delta t^2}$	$\frac{z}{(1-z)^2}$	$\frac{1}{2} \frac{z(1+z)}{(1-z)^2}$
$\frac{1}{p^3\Delta t^3}$	$\frac{1}{2} \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$	$\frac{1}{6} \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^3}$
$\frac{1}{p^4\Delta t^4}$	$\frac{1}{6} \frac{z(2+4z+z^2)}{(1-z)^4}$	$\frac{1}{24} \frac{z(1+11z+11z^2+z^3)}{(1-z)^4}$
$\frac{1}{p^5\Delta t^5}$	$\frac{1}{24} \frac{z(1+11z+11z^2+z^3)}{(1-z)^5}$	$\frac{1}{120} \frac{z(1+26z+66z^2+26z^3+z^4)}{(1-z)^5}$

функцию $K_*(z)$ всей системы можно найти по дискретным передаточным функциям ее отдельных звеньев, полюсы которых легко определяются, пользуясь при этом обычными правилами получения передаточной функции системы для различного соединения ее звеньев [85].

В качестве элементарных звеньев системы удобно использовать интегрирующие звенья k -го порядка. Для этого передаточную функцию (3.26) путем деления числителя и знаменателя на p^m нужно привести к виду

$$K(p) = \frac{\frac{A_0}{p^m} + \frac{A_1}{p^{m-1}} + \dots + \frac{A_l}{p^{m-l}}}{\frac{B_0}{p^m} + \frac{B_1}{p^{m-1}} + \dots + B_m} \quad (3.60)$$

Это преобразование эквивалентно замене системы с передаточной функцией $K(p)$ системой с такой же передаточной функцией, но с другой структурой, включающей лишь интегрирующие звенья различного порядка с различными коэффициентами передачи, соединенные

Таблица 3.2

$K_*(z)$

Метод Рагазини—Бергена (Мадведа—Траксела)	Метод Тастина	Метод Боксера—Талера
$\frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}$	$\frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}$	$\frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}$
$\frac{1}{6} \frac{1+4z+z^2}{(1-z)^2}$	$\left(\frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}\right)^2$	$\frac{1}{12} \frac{1+10z+z^2}{(1-z)^2}$
$\frac{1}{24} \frac{1+11z+11z^2+z^3}{(1-z)^3}$	$\left(\frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}\right)^3$	$\frac{1}{2} \frac{z(1-z^2)}{(1-z)^3}$
$\frac{1}{120} \frac{1+26z+66z^2+26z^3+z^4}{(1-z)^4}$	$\left(\frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}\right)^4$	$\frac{1}{6} \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4} - \frac{1}{720}$
$\frac{1}{720} \frac{1+57z+302z^2+302z^3+57z^4+z^5}{(1-z)^5}$	$\left(\frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}\right)^5$	$\frac{1}{24} \frac{z(1+11z+11z^2+z^3)}{(1-z)^5}$

по схеме, которая показана на рис. 3.3. Звенья с передаточными функциями вида $1/p^k$ имеют только нулевые полюсы кратности $r_0=k$. Дискретные передаточные функции этих звеньев можно легко найти по формулам (3.30), (3.42) и (3.46), положив $s=0$, $r_0=k$, $K(p)=1/p^k$. Этим самым операторы непрерывного интегрирования заменяются операторами дискретного интегрирования. Операторы дискретного интегрирования, полученные различными методами для звеньев с передаточными функциями $1/(p\Delta t)^k=1/q^k$, даны в табл. 3.2.

При таком расчленении системы на отдельные звенья не требуется знать полюсы передаточной функции.

Ниже описываются методы дискретной аппроксимации, использующие принцип замены операторов непрерывного интегрирования операторами дискретного интегрирования.

5. Метод Тастина [111]

Это один из первых методов дискретного представления операторов интегрирования.

Метод Тастина в конечном счете соответствует повторному применению формулы трапеций для вычисления интеграла.

Возьмем интегрирующее звено 1-го порядка. Сигнал $u(t)$ преобразуется этим звеном в сигнал $v(t)$ по формуле

$$v(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

В дискретные моменты времени $t_n=n\Delta t$ значения сигнала равны

$$\begin{aligned} v[n] &= \int_0^{n\Delta t} u(\tau) d\tau = \int_0^{(n-1)\Delta t} u(\tau) d\tau + \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} u(\tau) d\tau = \\ &= v[n-1] + I_1[n]. \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл

$$I_1[n] = \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} u(\tau) d\tau$$

по формуле трапеций с шагом Δt , получим

$$I_1[n] = \frac{\Delta t}{2} (u[n] + u[n-1]).$$

Таким образом, для вычисления последовательности $v[n]$ имеем рекуррентное уравнение

$$v[n] = \frac{\Delta t}{2} (u[n] + u[n-1]) + v[n-1],$$

которому соответствует дискретная передаточная функция

$$K_*(z) = \frac{\Delta t}{2} \frac{1+z}{1-z}. \quad (3.61)$$

Интегрирующее звено k -го порядка можно представить как последовательное соединение из k интегрирующих звеньев 1-го порядка. Заменяя в этой цепочке интегрирующие звенья первого порядка дискретными звеньями с передаточными функциями (3.61), получим следующую дискретную аппроксимацию интегрирующего звена k -го порядка:

$$K_*^{(k)}(z) = \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{1+z}{1-z} \right]^k. \quad (3.62)$$

Операторы (3.62) помещены в табл. 3.2.

6. Метод Мадведа — Траксела [102, 110]

Метод сводится к замене непрерывной системы с передаточной функцией $1/p^k$ импульсной системой по схеме рис. 3.2 с интерполирующим фильтром, имеющим треугольную импульсную переходную характеристику (линейная интерполяция входного сигнала). Поэтому дискретная аппроксимация операторов интегрирования в методе Мадведа—Траксела в точности совпадает с дискретной аппроксимацией этих операторов по методу Рагазини—Бергена (табл. 3.2).

7. Метод Боксера — Талера [94]

Этот метод аппроксимации передаточной функции $K(p)$ непрерывной динамической системы дискретной передаточной функцией $K_*(z)$ по своей идее отличается от описанных выше методов.

Переход от $K(p)$ и $K_*(z)$ по этому методу осуществляется из следующих соображений.

По методу z -преобразования, как показано выше, передаточная функция эквивалентной импульсной системы имеет вид

$$K_*(z) = K_*(e^{-\sigma}) = \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-\sigma n},$$

где $h[n]$ — дискретные значения импульсной переходной характеристики $h(t)$ непрерывной системы.

Поскольку

$$K(p) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt, \quad (3.63)$$

то, вычисляя интеграл (3.63) по методу прямоугольников с шагом Δt , получим

$$K(p) \approx \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-p\Delta t n}. \quad (3.64)$$

При малом Δt формулы (3.63) и (3.64) дают близкий результат. Сравнивая (3.64) и (3.25), видим, что передаточная функция $K_*(e^{-q})$ при малом шаге Δt приблизительно равна передаточной функции $K(p)$, если в ней переменную p заменить на $q/\Delta t$:

$$K_*(e^{-q}) \approx K\left(\frac{q}{\Delta t}\right)$$

или

$$K_*(z) \approx K\left(-\frac{\ln z}{\Delta t}\right).$$

Функция $K\left(-\frac{\ln z}{\Delta t}\right)$ — трансцендентная функция от z . Требуется же получить дробно-рациональную функцию от z . Для этого авторами метода предложено выразить операторы вида $1/q^k$, входящие в передаточную функцию $K(q/\Delta t)$, через e^{-q} , используя известное [25] разложение $\ln e^q$ в ряд

$$\ln e^q = q = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots\right), \quad (3.65)$$

где

$$x = \frac{1 - e^{-q}}{1 + e^{-q}} = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

Согласно (3.65)

$$\frac{1}{q} = 1/2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots\right). \quad (3.66)$$

Выполняя деление в (3.66), получим

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{4}{45}x^3 - \frac{44}{945}x^5 - \dots\right). \quad (3.67)$$

Ввиду быстрой сходимости ряда (3.67) можно пренебречь членами с положительными степенями x , тогда

$$\frac{1}{q} \approx \frac{1}{2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z} = R_1(z).$$

Приближенные выражения $R_k(z)$ для $1/q^k$ получаются путем возведения ряда (3.67) в k -ю степень и отбрасывания в результирующем ряде членов с положительными степенями x . Эти выражения для $k=1,5$ приведены в табл. 3.2.

Заметим, что аппроксимация в данном методе производится, по существу, в частотной области, а не во временной, как это было в описанных выше методах дискретной аппроксимации.

Итак, для получения дискретной передаточной функции по методу Боксера — Талера нужно заменить в передаточной функции $K(p)$, представленной в виде (3.60), операторы интегрирования $1/p^k$ операторами Боксера — Талера из табл. 3.2.

8. Примеры

Пусть задана линейная система с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{K_0 K_H^2 (1 + pT_K)}{p^2}.$$

Такую передаточную функцию имеет разомкнутая следящая система радиолокационного автодальномера с двумя интеграторами, коэффициент передачи которых K_H^2 [сек⁻²], и корректирующей цепью с постоянной времени T_K [2]; K_0 — безразмерный коэффициент усиления. Найдем для нее эквивалентные дискретные передаточные функции и рекуррентные моделирующие алгоритмы, используя различные методы дискретной аппроксимации.

Передаточная функция $K(p)$ имеет только нулевой полюс кратности $r_0=2$. По методу z -преобразования нахождение дискретной передаточной функции $K_*(z)$ сводится к применению формулы (3.30) при $s=0$, $r_0=2$ с учетом формулы (3.28) и табл. 3.1.

Согласно (3.28) получаем

$$C_{00} = \frac{d}{dp} \left[\frac{K_0 K_H^2 (1 + pT_K)}{p^2} p^2 \right] \Big|_{p=0} = K_0 K_H^2 T_K, \quad (3.68)$$

$$C_{01} = K_0 K_H^2 [1 + pT_K] \Big|_{p=0} = K_0 K_H^2.$$

По формуле (3.30) находим

$$K_*(z) = C_{00} K_{00}(z) + C_{01} K_{01}(z), \quad (3.69)$$

где в соответствии с табл. 3.1

$$K_{00}(z) = \frac{1}{1-z}, \quad K_{01}(z) = \frac{z}{(1-z)^2}. \quad (3.70)$$

Подставляя (3.68) и (3.70) в (3.69) и производя элементарные преобразования, окончательно получим

$$K_*(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 - 2z + z^2}, \quad a_0 = K_0 K_H^2 T_K \Delta t, \quad a_1 = a_0 - K_0 K_H^2 \Delta t^2. \quad (3.71)$$

Отсюда согласно общей формуле (3.24) непосредственно получаем рекуррентное уравнение, связывающее дискретный сигнал $v_*[n]$ на выходе системы с дискретным сигналом и $u[n]$ на входе системы

$$v_*[n] = a_0 u[n] + a_1 u[n-1] + 2v_*[n-1] - v_*[n-2]. \quad (3.72)$$

Совершенно аналогично, используя формулы (3.42) и (3.46) с учетом формул (3.41), (3.45) и табл. 3.1, найдем дискретные передаточные функции по методу Цыпкина — Гольденберга:

$$K_*(z) = \frac{a_1 z + a_2 z^2}{1 - 2z + z^2},$$

$$a_1 = K_0^2 K_H^2 (\Delta t^2 + T_K \Delta t), \quad a_2 = K_0 K_H^2 (\Delta t^2 - T_K \Delta t) \quad (3.73)$$

и по методу Рагазини—Бергена :

$$K_*(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{1 - 2z + z^2},$$

$$a_0 = \frac{1}{6} K_0 K_H^2 (\Delta t^2 + 3T_x \Delta t), \quad a_1 = \frac{2}{3} K_0 K_H^2 \Delta t^2, \quad (3.74)$$

$$a_2 = \frac{1}{6} K_0 K_H^2 (\Delta t^2 - 3T_x \Delta t).$$

Передаточным функциям ((3.73) и (3.74) соответствуют следующие рекуррентные алгоритмы:

$$v_*[n] = a_1 u[n-1] + a_2 u[n-2] + 2v_*[n-1] - v_*[n-2], \quad (3.75)$$

$$v_*[n] = a_0 u[n] + a_1 u[n-1] + a_2 u[n-2] + 2v_*[n-1] - v_*[n-2]. \quad (3.76)$$

Для использования метода Боксера—Талера поделим числитель и знаменатель передаточной функции $K(p)$ на p^2 :

$$K(p) = \frac{K_0 K_H^2}{p^2} + \frac{K_0 K_H^2 T_x}{p} = \frac{K_0 K_H^2 \Delta t^2}{q^2} + \frac{K_0 K_H^2 T_x \Delta t}{q},$$

где $q = p \Delta t$. Заменяя операторы интегрирования $1/q$ и $1/q^2$ соответствующими дискретными операторами интегрирования из табл. 3.2, запишем

$$K_*(z) = \frac{K_0 K_H^2 \Delta t^2}{12} \frac{1 + 10z + z^2}{(1-z)^2} + \frac{K_0 K_H^2 T_x \Delta t}{2} \frac{1+z}{1-z}.$$

После элементарных преобразований получим

$$K_*(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{1 - 2z + z^2}, \quad a_0 = \frac{1}{2} K_0 K_H^2 (\Delta t^2 + 6T_x \Delta t), \quad (3.77)$$

$$a_1 = \frac{10}{12} K_0 K_H^2 \Delta t^2, \quad a_2 = \frac{1}{12} K_0 K_H^2 (\Delta t^2 - 6T_x \Delta t). \quad (3.78)$$

Отсюда находим рекуррентный моделирующий алгоритм (3.76)

Если рассматривать замкнутую следующую систему автодальномера, то ее передаточная функция в линейном режиме имеет вид

$$K_0(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)}.$$

Аналогичной формулой выражается дискретная передаточная функция импульсной системы, эквивалентной замкнутой непрерывной системе,

$$K_{*0}(z) = \frac{K_*(z)}{1 + K_*(z)}, \quad (3.79)$$

где $K_*(z)$ — дискретная передаточная функция разомкнутой системы.

Подставляя в формулу (3.79) выражения для $K_*(z)$, определяемые формулами (3.71), (3.73), (3.74) и (3.77), легко найдем дискретные передаточные функции замкнутой системы автодальномера при различных методах дискретной аппроксимации и соответствующие им рекуррентные алгоритмы.

Приведенные примеры показывают, что для линейных систем невысокого порядка, таких, как следящие системы радиоустройств, могут быть получены весьма простые рекуррентные цифровые модели. Действительно, согласно алгоритмам (3.72), (3.75), (3.76) и (3.78) для вычисления одного дискретного значения сигнала на выходе следящей системы автодальномера с двумя интеграторами требуется произвести всего лишь 6—8 элементарных операций. При этом количество операций не зависит от выбранного шага моделирования. Использование дискретной свертки в качестве алгоритма цифровой модели в данном случае потребовало бы $2n$ элементарных операций на одну дискрету, где n — номер дискреты. В самом деле, импульсная переходная характеристика разомкнутой системы согласно формуле (3.27) имеет вид

$$h(t) = C_{00} + C_{01}t = K_0 K_n^2 (T_n + t), \quad t \geq 0, \quad (3.80)$$

где C_{00} и C_{01} определяются формулой (3.68). Импульсную переходную характеристику (3.80) нельзя заменить ограниченной во времени. Поэтому вычисление выходного сигнала $v_*[n]$ по методу дискретной свертки нужно производить согласно алгоритму [см., на-

пример, (3.12)] $v_*[n] = \sum_{k=0}^n C[k] h[k] u[n-k]$, где $h[n] = K_0 K_n^2 T_n \times$

$\times (1 + \Delta tn/T_n)$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае для получения цифровой модели системы на основе дискретной свертки объем вычислений значительно больше, чем при моделировании с помощью рекуррентных цифровых моделей.

9. Сравнительная характеристика методов дискретной аппроксимации

Приведенные методы не охватывают всех известных к настоящему времени методов. Сюда не вошли методы, которые можно использовать только при типовых воздействиях на входе системы, такие, как метод Красовского — Поспелова [44], требующий, чтобы изображение по Лапласу входного сигнала было дробно-рациональной функцией; метод Андерсона — Болла — Восса [93], в котором входной сигнал аппроксимируется полиномом; метод оптимального цифрового моделирования Сейджа и Барта [108] и другие методы, нашедшие ограниченное применение.

Рассмотренные выше методы являются универсальными в том смысле, что они могут быть применены при произвольных входных сигналах и к любым линейным системам с постоянными сосредоточенными параметрами.

Независимо от метода дискретной аппроксимации (исключение составляет лишь метод автора при использовании формул численного интегрирования повышенной точности) рекуррентные алгоритмы при моделировании одной и той же системы получаются одинаковыми по сложности: порядок рекуррентного уравнения вида (3.24) совпадает с порядком моделируемой системы (см. п. 8). Различные методы дискретизации дают лишь различные значения коэффициентов a_k и b_k в формуле (3.24), при этом будет различной точность аппроксимации при выбранном шаге дискретизации.

Изложенные методы различаются еще и по объему подготовительной работы. Выбор того или иного метода дискретной аппроксимации в конкретной задаче должен производиться с учетом указанных соображений.

Подготовительная работа при всех методах дискретной аппроксимации упрощается и имеет практически одинаковый объем, если дискретизация осуществляется по принципу замены операторов непрерывного интегрирования операторами дискретного интегрирования, так как при этом не требуется отыскивать полюсы передаточной функции моделируемой системы. Методы Тастина, Мадведа — Траксела и Боксера — Талера могут быть использованы только таким образом.

Однако в этих случаях снижается точность аппроксимации. Действительно, при дискретной аппроксимации с использованием полюсов всей системы, погрешность выходного сигнала возникает только в результате неточной интерполяции входного сигнала импульсным элементом, включенным на входе системы (см. рис. 3.1). Дискретная аппроксимация по принципу замены операторов непрерывного интегрирования операторами дискретного интегрирования означает, по существу, замену непрерывной системы импульсной системой с многими импульсными элементами, по одному на каждое интегрирующее звено, подвергаемое дискретизации [49, 63]. Такое многократное прерывание и сглаживание входного сигнала при прохождении его через систему увеличивает погрешность выходного сигнала.

Для увеличения точности следует стремиться применять методы дискретной аппроксимации, позволяющие использовать информацию о полюсах передаточной функции (методы дискретной аппроксимации повышенной точности). К ним относятся методы, описанные в пп. 1—4 этого параграфа. Если передаточная функция имеет высокий порядок и нахождение ее полюсов связано с большими трудностями, то методы повышенной точности следует применять к отдельным звеньям системы, полюсы которых известны или легко находятся. Подготовительная работа при этом усложняется незначительно, ибо она, как уже отмечалось, сводится к расчету по готовым формулам.

В тех случаях, когда полюсы найти не удастся и в качестве элементарных звеньев системы приходится использовать интегрирующие звенья, методы дискретной аппроксимации повышенной точности теряют свои заметные преимущества в точности; однако возможность применения их не исключается (табл. 3.2). В этом смысле методы повышенной точности являются универсальными и более перспективными.

При прочих равных условиях наибольшей точностью среди описанных методов дискретной аппроксимации обладают, по-видимому, метод Рагаззини—Бергена и метод, предложенный автором, в случае, когда интеграл $I, [n+2]$ вычисляется способом Симпсона [формула (3.58)], так как первый основан на линейной интерполяции, а второй — на квадратичной интерполяции функций по дискретным точкам. Эти виды интерполяции обладают большей точностью, чем ступенчатая интерполяция (метод Цыпкина—Гольденберга) и интерполяция с помощью δ -функций (метод z -преобразования), и могут быть рекомендованы как наиболее перспективные. Метод Цыпкина—Гольденберга несколько уступает им по точности. Наименьшей точностью при аппроксимации интегрирующих звеньев порядка выше 1-го обладает метод Тастина, так как он соответствует повторному применению формулы трапеций. Для увеличения точности дискретной аппроксимации непрерывных передаточных функций в принципе возможно применение интерполирующих функций более высокого порядка, чем линейная и квадратичная [49, 63]. Однако при этом заметно усложняются алгоритмы. Поэтому приемы дальнейшего уве-

личения точности дискретной аппроксимации часто не оправдывают себя. Практически бывает выгоднее несколько уменьшить шаг дискретизации, чем применять алгоритмы, основанные на высших интерполяционных формулах.

Заметим, что приведенная здесь сравнительная характеристика методов дискретной аппроксимации основана на качественной оценке их точности. Задача количественной оценки погрешности различных методов дискретной аппроксимации является довольно сложной. Методы решения этой задачи излагаются в § 3.7.

3.4. Моделирование узкополосных линейных систем

Рассмотренные выше алгоритмы позволяют находить мгновенные значения сигнала на выходе линейной динамической системы по известным мгновенным значениям сигнала на входе и удобны для применения при цифровом моделировании видеотрактов радиоустройств, следящих систем и т. д.

В радиотехнической практике широко распространены узкополосные высокочастотные линейные системы типа резонансных усилителей и фильтров промежуточной частоты.

Узкополосные (избирательные) линейные системы можно определить как системы, у которых импульсная переходная характеристика представляет собой колебание с некоторой средней частотой ω_0 , равной средней (резонансной) частоте системы, и с медленно меняющимися по сравнению с $\cos \omega_0 t$ огибающей $H(t)$ и фазой $\varphi_h(t)$

$$h(t) = H(t) \cos [\omega_0 t + \varphi_h(t)] = \operatorname{Re} \mathbf{H}(t) e^{j\omega_0 t}, \quad (3.81)$$

где $\mathbf{H}(t) = H(t) e^{j\varphi_h(t)}$ — комплексная огибающая импульсной переходной характеристики.

При исследовании процессов в избирательных системах, как правило, рассматриваются случаи, когда входной сигнал $u(t)$ [а следовательно, и выходной сигнал $v(t)$] также представляют собой колебания с медленно меняющимися ком-

плексными огибающими $U^0(t) = U^0(t) e^{j\varphi_u^0(t)}$ и $V^0(t) = V^0(t) e^{j\varphi_v^0(t)}$ и с некоторой средней (несущей) частотой ω_1 , мало отличающейся от резонансной частоты ω_0 , т. е.

$$u(t) = \operatorname{Re} U^0(t) e^{j\omega_0 t} = \operatorname{Re} U(t) e^{j\varphi_u^0(t)} e^{j\Omega t} e^{j\omega_0 t};$$

$$v(t) = \operatorname{Re} V^0(t) e^{j\omega_0 t} = \operatorname{Re} V(t) e^{j\varphi_v^0(t)} e^{j\Omega t} e^{j\omega_0 t},$$

где $\Omega = \omega_1 - \omega_0$ — расстройка несущей частоты входного сигнала относительно резонансной частоты системы, причем $\Omega \ll \omega_0$; $U(t)$, $\varphi_u^0(t)$, $V(t)$, $\varphi_v^0(t)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции входного и выходного сигналов.

В дальнейшем расстройку частоты сигнала будем учитывать как дополнительное линейно изменяющееся слагаемое закона фазовой модуляции. Комплексный закон модуляции сигнала будем записывать в виде

$$U(t) = U(t) e^{j\varphi_u(t)}, \quad V(t) = V(t) e^{j\varphi_v(t)}, \quad (3.82)$$

где $\varphi_u(t) = \varphi_u^0(t) + \Omega t$, $\varphi_v(t) = \varphi_v^0(t) + \Omega t$.

При исследовании избирательных систем обычно интересуются не мгновенными значениями сигнала на выходе системы, а мгновенными значениями его медленно меняющихся параметров — огибающей $V(t)$ и фазы $\varphi_v(t)$, т. е. мгновенными значениями его комплексной огибающей $V(t)$. В связи с этим задачу цифрового моделирования избирательных линейных систем целесообразно ставить как задачу нахождения алгоритмов, позволяющих вычислять на ЦВМ дискретные значения $V[n] = V(n\Delta t)$ комплексной огибающей сигнала на выходе системы по известным дискретным значениям $U[n] = U(n\Delta t)$ входного сигнала и заданным характеристикам системы.

Для вычисления дискретной комплексной огибающей выходного сигнала в принципе можно использовать описанные выше алгоритмы, с помощью которых можно найти последовательность мгновенных значений выходного сигнала, а затем, воспроизводя на ЦВМ операции амплитудного и фазового детектирования, можно найти дискретную огибающую $V[n]$ и дискретную фазу $\varphi_v[n]$ выходного сигнала.

Однако такой путь связан с большим объемом вычислений. Во-первых, для обеспечения требуемой точности при дискретном представлении быстро осциллирующих функций нужно выбрать очень малый шаг

дискретизации, который часто во много раз меньше времени наблюдения процессов в моделируемой системе, что приводит к необходимости формирования очень большого числа дискретных значений процессов. Так, например, для воспроизведения на ЦВМ одной реализации узкополосного сигнала длительностью 10 мксек. имеющего среднюю частоту $f_0 = 30 \text{ МГц}$, при шаге дискретизации $\Delta t = 1/2f_0$, т. е. при двух выборках на период средней частоты, требуется вычислить 600 дискретных значений сигнала.

Во-вторых, моделирование операций детектирования требует дополнительных вычислений. Ясно, что такой прием моделирования обладает явной избыточностью, т. е. значительная часть операций является излишней.

Весьма эффективным способом сокращения объема вычислений при цифровом моделировании избирательных радиосистем является применение *метода огибающих*, позволяющего свести преобразование узкополосных процессов при их прохождении через избирательные линейные системы к преобразованию медленно меняющихся комплексных амплитуд.

1. Метод огибающих. Комплексные линейные фильтры

Приведем некоторые, необходимые для дальнейшего сведения, относящиеся к методу огибающих.

Согласно методу огибающих [31] комплексная амплитуда $V(t)$ сигнала на выходе узкополосной линейной системы выражается через комплексную амплитуду $U(t)$ входного сигнала следующим интегральным соотношением:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) U(t_1 - \tau) d\tau, \quad (3.83)$$

где $H(t)$ — комплексная огибающая импульсной переходной характеристики системы.

Выражение (3.83) является комплексным аналогом интеграла свертки (3.3) (интеграла Дюамеля). Простой вывод формулы (3.83) имеется в работе [88].

В частном случае, когда входной сигнал точно настроен на среднюю частоту системы и имеет лишь ампли-

тудную модуляцию [$\varphi_u(t) \equiv 0$], а импульсная переходная характеристика системы не имеет фазовой модуляции ($\varphi_h(t) \equiv 0$), огибающие в выражении (3.83) будут вещественными:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) U(t - \tau) d\tau.$$

В этом случае формула свертки для амплитуд отличается от формулы свертки для мгновенных значений лишь множителем $1/2$.

Следует отметить, что равенство (3.83) является приближенным. Однако погрешностью метода огибающих можно пренебречь, если функции $U(t)$ и $V(t)$ медленно меняются по сравнению с $\cos \omega_0 t$. Это условие выполняется, если ширина спектра колебания $u(t)$, ширина полосы пропускания линейной системы, на которую оно воздействует, и расстройка частоты входного сигнала по отношению к средней частоте системы малы по сравнению с частотой ω_0 . Абсолютные значения полосы и расстройки роли не играют.

Если функции $U(t)$ и $H(t)$ имеют рассмотренные в § 3.2 односторонние или двусторонние ограничения по времени, то пределы в интеграле (3.83) будут иметь такой же вид, как и в интегралах (3.4)–(3.8). В частности, если $U(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и узкополосная система физически осуществима ($H(t) \equiv 0$ при $t < 0$), то

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^t H(\tau) U(t - \tau) d\tau. \quad (3.84)$$

Если же импульсная переходная характеристика системы имеет конечную длительность (или допускает аппроксимацию функцией, ограниченной во времени), то

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^T H(\tau) U(t - \tau) d\tau, \quad (3.85)$$

где T — длительность импульсной переходной характеристики.

Существенным достоинством формулы комплексной свертки (3.83) является то, что она позволяет при линейных преобразованиях высокочастотных процессов

оперировать лишь с их медленно меняющимися законами модуляции практически без потери точности и информации, заключенной в высокочастотных колебаниях. При этом несущая частота, не содержащая информации, исключается из рассмотрения. В этом и состоит сокращение избыточности при использовании метода огибающих.

Комплексную свертку (3.83) можно рассматривать как описание поведения так называемого линейного *комплексного фильтра* [34, 43], преобразующего комплексный сигнал $U(t)$ в комплексный сигнал $V(t)$, при этом $H^0(t) = \frac{1}{2} H(t)$ — импульсная переходная характеристика комплексного фильтра. В операторной форме процесс комплексной фильтрации можно записать в виде

$$V(p) = K(p) U(p),$$

где $U(p)$ и $V(p)$ — изображения по Лапласу входного и выходного комплексных сигналов соответственно; $K(p)$ — передаточная функция комплексного фильтра [изображение по Лапласу функции $H^0(t)$].

Комплексный сигнал $U(t)$ имеет вполне определенный физический смысл, если его рассматривать как пару вещественных сигналов:

$$U_1(t) = \operatorname{Re} U(t), \quad U_2(t) = \operatorname{Im} U(t),$$

представляющих собой вещественную и мнимую части комплексного сигнала (квадратурные компоненты сигнала).

Представляя выходной комплексный сигнал $V(t)$ и импульсную переходную характеристику $H^0(t)$ комплексного фильтра в виде квадратурных компонент, запишем формулу (3.83) в виде

$$V(t) = V_1(t) + jV_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [H_1(\tau) + jH_2(\tau)] [U_1(t - \tau) + jU_2(t - \tau)] d\tau.$$

Отсюда

$$V_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\tau) U_1(t - \tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\tau) U_2(t - \tau) d\tau,$$

$$V_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\tau) U_2(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\tau) U_1(t - \tau) d\tau \quad (3.86)$$

или в операторной форме

$$\begin{aligned} V_1(p) &= K_1(p) U_1(p) - K_2(p) U_2(p), \\ V_2(p) &= K_1(p) U_2(p) + K_2(p) U_1(p), \end{aligned} \quad (3.87)$$

где $U_1(p)$, $U_2(p)$, $V_1(p)$, $V_2(p)$ — изображения по Лапласу квадратурных компонент входного и выходного сигналов соответственно; $K_1(p)$ и $K_2(p)$ — передаточные функции линейных фильтров с импульсными переходными функциями характеристиками $H_1(t)$ и $H_2(t)$ соответственно.

Огибающая и фаза колебания $u(t)$ выражаются через его квадратурные компоненты известными формулами

$$V(t) = \sqrt{V_1^2(t) + V_2^2(t)}, \quad \varphi_v(t) = \text{arctg} \frac{V_2(t)}{V_1(t)}.$$

Система уравнений (3.87) легко приводится к матричной форме

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1(p) \\ V_2(p) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_1(p) & -K_2(p) \\ K_2(p) & K_1(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Из соотношений (3.86) — (3.88) следует, что комплексный фильтр является частным случаем двумерного линейного вещественного фильтра (см. § 2.8). Если в общем случае элементы передаточной матрицы

$$\|K(p)\| = \begin{bmatrix} K_{11}(p) & K_{12}(p) \\ K_{21}(p) & K_{22}(p) \end{bmatrix}$$

двумерного линейного фильтра могут быть произвольными, то элементы передаточной матрицы комплексного фильтра обладают свойством симметрии:

$$K_{11}(p) = K_{22}(p) = K_1(p), \quad K_{21}(p) = -K_{12}(p) = K_2(p).$$

Структурная схема двумерного фильтра, эквивалентного комплексному фильтру, показана на рис. 3.4. Такой двумерный фильтр называется фильтром с антисимметричными прямыми перекрестными связями [43].

В дальнейшем мы будем пользоваться в основном комплексной формой записи, переходя к вещественной лишь на последних этапах. Комплексная форма записи

узкополосной фильтрации по методу огибающих предпочтительнее, чем матричная форма записи, так как первая полностью совпадает с обычной формой записи одномерной вещественной фильтрации. Использование ее

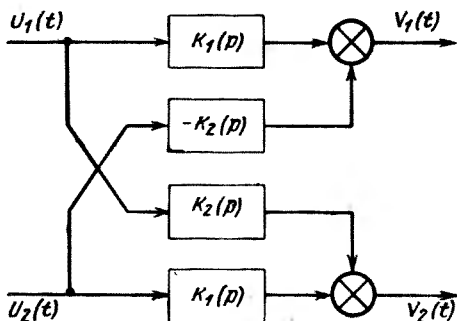


Рис. 3.4.

позволяет обобщить данные выше методы цифрового моделирования линейных динамических систем на случай моделирования узкополосных линейных систем, описываемых по методу огибающих.

2. Цифровые модели узкополосных линейных систем, основанные на дискретной комплексной свертке

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда импульсная переходная характеристика системы имеет одностороннее или двустороннее ограничение. Подвергнув формулы (3.84), (3.85) дискретизации, используя при этом, как и ранее, методы численного интегрирования, получим следующие алгоритмы вычисления дискретных значений комплексной огибающей на выходе системы:

$$V_*[n] = \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=0}^n c_0[k] H[k] U[n-k] = \sum_{k=0}^n a[k] U[n-k], \quad (3.89)$$

$$V_*[n] = \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=0}^N c_0[k] H[k] U[n-k] = \sum_{k=0}^N a[k] U[n-k], \quad (3.90)$$

где Δt — шаг дискретизации; $N = T/\Delta t$; $c_d[k]$ — коэффициенты, зависящие от метода численного интегрирования; $H[k] = H(k\Delta t)$ — дискретные значения комплексной огибающей импульсной переходной характеристики системы; $U[n]$ — дискретные значения комплексной огибающей входного сигнала; $a[k] = \frac{\Delta t}{2} C_0[k] H[k]$.

Величина шага Δt в формулах (3.89), (3.90) определяется величиной верхней частоты в спектре модуляции высокочастотных колебаний, а не в спектре самих высокочастотных колебаний, как это было бы без привлечения метода огибающих. Это обычно дает возможность значительно увеличить шаг дискретизации и тем самым сократить вычислительные затраты.

Замена непрерывных сверток (3.84) и (3.85) дискретными свертками (3.89) и (3.90) соответственно означает замену непрерывных комплексных фильтров эквивалентными дискретными комплексными фильтрами с передаточными функциями

$$K_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a[k] z^k, \quad (3.91)$$

$$K_*(z) = \sum_{k=0}^N a[k] z^k. \quad (3.92)$$

Отличие формул (3.91) и (3.92) от формул (3.14) и (3.15) состоит лишь в том, что коэффициенты перед z^k в формулах (3.91) и (3.92) являются, вообще говоря, комплексными.

Структурные схемы фильтров с передаточными функциями (3.15) и (3.92) одинаковы (см. рис. 2.1). Процесс дискретной комплексной фильтрации дискретного сигнала $U[n]$ фильтром с передаточной функцией (3.92) в соответствии с рис. 2.1 состоит в следующем. Последовательность комплексных чисел $U[n]$, порождаемая непрерывной комплексной огибающей входного сигнала, поступает на линию задержки с N отводами, задержка между которыми равна Δt . Отводы линии задержки подключены к весовым усилителям с комплексными коэффициентами усиления $a[k]$. Выходы весовых усилителей суммируются, в результате чего образуется последовательность комплексных чисел $V[n]$, представляющая собой дискретные значения комплексной огибающей вы-

ходного сигнала. Такая схема вычислений может быть реализована в виде стандартной программы. Операции сложения и умножения комплексных чисел осуществляются на ЦВМ по стандартной подпрограмме.

Вычисления в соответствии с алгоритмом (3.90) можно проводить и без привлечения операций над комплексными числами. Для этого нужно выразить дискретные комплексные огибающие через дискретные квадратурные компоненты в виде

$$\begin{aligned} V_{*1}[n] &= \sum_{k=0}^N a_1[k] U_1[n-k] - \sum_{k=0}^N a_2[k] U_2[n-k], \\ V_{*2}[n] &= \sum_{k=0}^N a_1[k] U_2[n-k] + \sum_{k=0}^N a_2[k] U_1[n-k], \end{aligned} \quad (3.93)$$

где $U_{1,2}[n] = U_{1,2}(n\Delta t)$, $V_{*1,2}[n] = V_{*1,2}(n\Delta t)$ — дискретные значения квадратурных составляющих входного и выходного сигналов соответственно; $a_{1,2}[k] = (\Delta t/2) c_0[k] H_{1,2}[k]$, $H_{1,2}[k] = H_{1,2}(k\Delta t)$ — дискретные квадратурные составляющие импульсной переходной характеристики.

Последнее означает замену дискретного комплексного фильтра двумерным вещественным дискретным фильтром с передаточной матрицей

$$K_*(z) = \begin{vmatrix} K_{*1}(z) & -K_{*2}(z) \\ K_{*2}(z) & K_{*1}(z) \end{vmatrix},$$

где

$$K_{*1}(z) = \sum_{k=0}^N a_1[k] z^k, \quad K_{*2}(z) = \sum_{k=0}^N a_2[k] z^k.$$

Структурная схема этого двумерного дискретного фильтра показана на рис. 3.5. Она является эквивалентом схемы рис. 3.4 так же, как и формулы (3.93) являются дискретным эквивалентом формул (3.86).

Из (3.93) видно, что осуществление дискретной комплексной свертки при прочих равных условиях требует в общем случае в четыре раза больше операций, чем осуществление вещественной дискретной свертки. В частных случаях количество операций может быть меньшим. Так, если $\varphi_h(t) \equiv 0$ (в этом случае узкополосная система

имеет, как известно, линейную фазовую характеристику), то $a_2[k] \equiv 0$, $K_{*2}(z) = 0$ и, следовательно,

$$V_{*1}[n] = \sum_{k=0}^N a_1[k] U_1[n-k], \quad V_{*2}[n] = \sum_{k=0}^N a_1[k] U_2[n-k],$$

$$a_1[k] = a[k] = \frac{\Delta t}{2} c_0[k] H[k]. \quad (3.94)$$

При этом в двумерном дискретном фильтре на рис. 3.5 отсутствуют перекрестные связи. Операций здесь только вдвое больше по сравнению с вещественной сверткой.

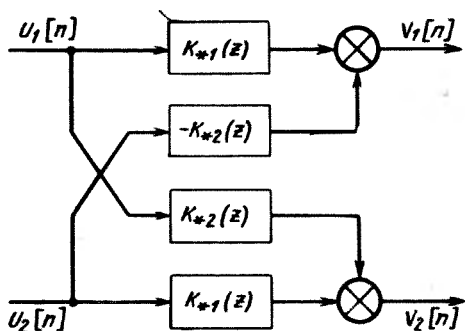


Рис. 3.5.

Столько же операций требуется, если входной сигнал промодулирован лишь по амплитуде и не имеет расстройки ($\varphi_u(t) \equiv 0$):

$$V_{*1}[n] = \sum_{k=0}^N a_1[k] U_1[n-k], \quad V_{*2}[n] =$$

$$= \sum_{k=0}^N a_2[k] U_1[n-k], \quad U_1[n] = U[n]. \quad (3.95)$$

В этом случае сигнал $U_2[n]$ на втором входе двумерного фильтра на рис. 3.5 равен нулю.

Если одновременно выполняются два указанных условия, то

$$V_{*1}[n] = V[n] = \sum_{k=0}^N a[k] U[n-k]. \quad (3.96)$$

В этом случае свертка огибающих является вещественной, и двумерный фильтр превращается в одномерный.

В некоторых случаях для вычислений удобна тригонометрическая форма записи комплексной свертки (3.90) в виде

$$V_{*1,2}[n] = \sum_{k=0}^N a[k] U[n-k] \frac{\cos(\varphi_h[n] + \varphi_u[n-k])}{\sin} \quad (3.97)$$

Если использовать метод дискретизации комплексной свертки, основанный на принципе замены непрерывного комплексного фильтра эквивалентным импульсным фильтром, то по аналогии с дискретизацией вещественной свертки (§ 3.2) получим алгоритмы вида (3.89) — (3.90) с той лишь разницей, что вместо весовой функции $a[k]$ будет использоваться весовая функция $H_*[k]$ — дискретная импульсная переходная характеристика приведенной непрерывной части комплексного фильтра. Тогда

$$V_*[n] = \sum_{k=0}^n H_*[k] U[n-k], \quad (3.98)$$

$$V_*[n] = \sum_{k=0}^N H_*[k] U[n-k]. \quad (3.99)$$

Из формул (3.98), (3.99) можно легко получить алгоритмы, аналогичные алгоритмам (3.93) — (3.97), заменив в последних $a_1[k]$, $a_2[k]$ и $a[k]$ на $H_{*1}[k] = \operatorname{Re} H_*[k]$, $H_{*2}[k] = \operatorname{Im} H_*[k]$ и $H_*[k] = |H_*[k]|$ соответственно.

3. Моделирование узкополосных линейных систем с помощью комплексных рекуррентных разностных уравнений

Оказывается, что алгоритмы вида (3.98) при определенных условиях можно заменить более экономичными рекуррентными алгоритмами [17], т. е. разностные методы, описанные в § 3.3, допускают обобщение на случай цифрового моделирования комплексных линейных фильтров, к которым по методу огибающих сводятся узкополосные линейные системы.

Такое обобщение возможно, если передаточная функция комплексного фильтра является дробно-рациональной функцией вида

$$K(p) = \frac{A_0 + A_1 p + \dots + A_l p^l}{B_0 + B_1 p + \dots + B_m p^m},$$

где $A_i, i = \overline{1, l}, B_j, j = \overline{1, m}$ — в общем случае комплексные коэффициенты.

Последнее имеет место в целом ряде практически важных случаев. Действительно, передаточная функция $K(p)$ есть не что иное, как *укороченная передаточная функция* узкополосной системы, которая является операторной записью *укороченного дифференциального уравнения*, связывающего комплексные огибающие $U(t)$ и $V(t)$ и приближенно заменяющего полное дифференциальное уравнение узкополосной системы [31]. Укороченную передаточную функцию узкополосной системы можно получить [31], зная комплексный коэффициент передачи системы $K(j\Omega)$, записанный как функция сравнительно небольших расстроек $\Omega = \omega - \omega_0$, где ω — частота входного гармонического сигнала, ω_0 — средняя (резонансная) частота системы, путем простой замены аргумента $j\Omega$ на p , т. е.

$$K(p) = K(j\Omega) |_{j\Omega = p}$$

Так, например, комплексный коэффициент передачи усилителя промежуточной частоты (УПЧ) с одиночными настроенными в резонанс контурами равен [27]

$$K_1(j\Omega) = \frac{k_{01}}{(1 + j\Omega/\Delta\omega)^n}, \quad (3.100)$$

где n — число каскадов; k_{01} — коэффициент усиления на резонансной частоте; $\Delta\omega$ — полоса пропускания одного контура на уровне 0,7.

Комплексные коэффициенты передачи УПЧ с попарно расстроенными контурами и УПЧ с двухконтурными полосовыми фильтрами имеют одинаковый вид

$$K_2(j\Omega) = \frac{k_{02}}{\left[\left(1 + \frac{j(\Omega + \Omega_0)}{\Delta\omega} \right) \left(1 + \frac{j(\Omega - \Omega_0)}{\Delta\omega} \right) \right]^m}, \quad (3.101)$$

где k_{02} — коэффициент, определяющий усиление УПЧ на резонансной частоте; $\Delta\omega$ — полоса пропускания одного

контура на уровне 0,7; m — число пар расстроенных каскадов в первом случае и число каскадов во втором случае; Ω_0 — расстройка контуров в первом случае, $\Omega_0 = \beta \Delta\omega$ — во втором случае (β — фактор связи, равный произведению коэффициента связи между контурами на добротность).

Передаточные функции $K(p)$, соответствующие формулам (3.100), (3.101), имеют вид

$$K_1(p) = \frac{k_{01}}{\left(1 + \frac{p}{\Delta\omega}\right)^n}, \quad K_2(p) = \frac{k_{02}}{\left[\left(\frac{\Omega_0}{\Delta\omega}\right)^2 + \left(1 + \frac{p}{\Delta\omega}\right)^2\right]^m}.$$

Таким образом, получили, что передаточные функции комплексных фильтров в данных примерах являются дробно-рациональными. Это имеет место и в других случаях.

Для получения рекуррентных уравнений, моделирующих процессы комплексной фильтрации, нужно, как и в случае вещественной фильтрации, перейти от непрерывных дробно-рациональных передаточных функций комплексных фильтров к эквивалентным дискретным передаточным функциям. Для этой цели полностью пригодны все методы дискретной аппроксимации, описанные в § 3.3. Применяя их, приходим к дробно-рациональным дискретным укороченным передаточным функциям и рекуррентным уравнениям вида

$$K_*(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_l z^l}{1 + b_1 z + \dots + b_m z^m}, \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} V_*[n] = & a_0 U[n] + \dots + a_l U[n-l] - \\ & - b_1 V_*[n-1] - \dots - b_m V_*[n-m]. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Здесь в отличие от (3.23) и (3.24) коэффициенты a_i , b_j и последовательности $U[n]$, $V_*[n]$ являются, вообще говоря, комплексными.

Структурная схема дискретного комплексного фильтра с передаточной функцией (3.102) будет такой же, как схема, показанная на рис. 2.2, если в последней заменить вещественные дискретные сигналы $x[n]$ и $\xi[n]$ на комплексные сигналы $U[n]$ и $V_*[n]$, а коэффициенты усиления a_i и b_j — на коэффициенты a_i и b_j .

Пример 1. Пусть в качестве узкополосной системы задан однокаскадный УПЧ с двухконтурным полосовым фильтром при оптимальной связи между контурами ($\beta=1$, $\Omega_0=\Delta\omega$). В этом случае, как известно [27], получается предельная одногорбая частотная характеристика. Согласно (3.101) укороченная передаточная функция такого УПЧ имеет вид

$$K_2(p) = \frac{k_{02}}{1 + (1 + p/\Delta\omega)^2}.$$

Выберем для простоты величину k_{02} так, чтобы коэффициент усиления УПЧ на резонансной частоте равнялся единице ($|K_2(0)|=1$), тогда

$$K_2(p) = \frac{2}{1 + (1 + p/\Delta\omega)^2}.$$

Пусть на входе УПЧ действует некоторый непрерывный узкополосный сигнал

$$u(t) = \text{Re } U(t) e^{j\omega_0 t} = \text{Re } U(t) e^{j\varphi_u(t)} e^{j\omega_0 t},$$

где $U(t)$ и $\varphi_u(t)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции сигнала соответственно; ω_0 — несущая частота, совпадающая с резонансной частотой УПЧ [расстройка частоты согласно (3.82) включена в $\varphi_u(t)$].

Реакцию УПЧ на сигнал $u(t)$ обозначим как

$$v(t) = \text{Re } V(t) e^{j\omega_0 t} = \text{Re } V(t) e^{j\varphi_v(t)} e^{j\omega_0 t},$$

где $V(t)$ и $\varphi_v(t)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции выходного сигнала (фаза выходного сигнала рассматривается здесь относительно фазы немодулированной несущей вида $\cos \omega_0 t$).

Для получения рекуррентного моделирующего алгоритма воспользуемся, например, методом Цыпкина — Гольденберга (см. § 3.3).

Передаточная функция $K_2(p)$ имеет два простых комплексно-сопряженных полюса

$$p_{1,2} = -\Delta\omega \pm j\Delta\omega.$$

Следовательно,

$$K_2(p) = \frac{2\Delta\omega^2}{(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Для нахождения дискретной передаточной функции $K_{*2}(z)$, аппроксимирующей передаточную функцию $K_2(p)$, в данном случае целесообразно использовать формулу (3.43), согласно которой

$$K_{*2}(z) = K_2(0) + \left(\frac{C_{10}}{1 - e^{q_1} z} + \frac{C_{20}}{1 - e^{q_2} z} \right) (1 - z),$$

где

$$q_{1,2} = p_{1,2} \Delta t = -\Delta\omega \Delta t \pm j\Delta\omega \Delta t = -\overline{\Delta\omega} \pm j\overline{\Delta\omega};$$

$$C_{1,2,0} = \left[\frac{1}{p} K(p) (p - p_{1,2}) \right] \Big|_{p=p_{1,2}} = -\frac{1}{2} (1 \pm j).$$

Учитывая, что $K_2(0) = 1$ и то, что величины q_1, q_2 и C_{10}, C_{20} комплексно-сопряженные, запишем

$$K_{*2}(z) = 1 + (1 - z)^2 \operatorname{Re} \frac{C_{10}}{1 - e^{q_1 z}} = 1 - (1 - z) \operatorname{Re} \frac{1 + j}{1 - e^{q_1 z}}.$$

После элементарных преобразований окончательно получим

$$K_{*2}(z) = \frac{a_1 z + a_2 z^2}{1 + b_1 z + b_2 z^2},$$

где

$$a_1 = 1 - e^{-\overline{\Delta\omega}} (\sin \overline{\Delta\omega} + \cos \overline{\Delta\omega});$$

$$a_2 = e^{-\overline{\Delta\omega}} (e^{-\overline{\Delta\omega}} + \sin \overline{\Delta\omega} - \cos \overline{\Delta\omega});$$

$$b_1 = -2e^{-\overline{\Delta\omega}} \cos \overline{\Delta\omega}; \quad b_2 = e^{-2\overline{\Delta\omega}}.$$

Идентифицируя передаточную функцию $K_{*2}(z)$, найдем следующее рекуррентное уравнение, связывающее последовательность значений $V_*[n]$ комплексной амплитуды сигнала на выходе УПЧ с последовательностью значений $U[n]$ комплексной амплитуды входного сигнала

$$V_*[n] = a_1 U[n-1] + a_2 U[n-2] - b_1 V_*[n-1] - b_2 V_*[n-2]. \quad (3.104)$$

В данном случае коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 — вещественные числа.

Уравнение (3.104) является простым алгоритмом, моделирующим процесс преобразования колебания с произвольными законами амплитудной и фазовой модуляции при прохождении его через УПЧ со связанными контурами. Формула (3.104) в отличие от формулы дискретного свертывания (3.89), которую также можно было бы применить в данном случае, при любом шаге Δt требует одинакового количества операций для вычисления одной дискреты комплексной амплитуды выходного сигнала. При дискретной свертке количество операций на одну дискрету растет пропорционально величине отношения постоянной времени моделируемой системы к шагу дискретизации. В случаях, когда это отношение составляет десятки и сотни, формулы дискретного свертывания потребовали бы на 1—2 порядка операций больше, чем это требует рекуррентная формула (3.89).

3.5. Моделирование нелинейных систем

1. Классификация нелинейных систем

При рассмотрении способов цифрового моделирования нелинейных систем целесообразна следующая их классификация.

Во-первых, нелинейные системы можно разделить на два основных класса: безынерционные нелинейные системы (класс I) и инерционные нелинейные системы.

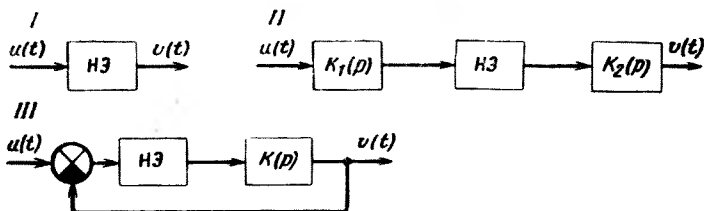


Рис. 3.6.

Среди инерционных нелинейных систем можно выделить системы, которые являются комбинацией из двух типов развязанных между собой отдельных функциональных звеньев: линейных инерционных и нелинейных безынерционных (*функциональные системы*), и системы, которые не являются таковыми (инерционные нелинейные *нефункциональные системы* — класс IV). Класс II образуют функциональные системы, у которых нелинейные звенья не включены в контуры с обратной связью (инерционные нелинейные *функциональные замкнутые системы*). Класс III образуют функциональные системы с нелинейностями в контурах с обратной связью (инерционные нелинейные *функциональные замкнутые системы*).

На рис. 3.6 приведены примеры функциональных нелинейных систем I, II и III классов, где НЭ — нелинейный безынерционный элемент, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ — передаточные функции линейных динамических звеньев. Схема II на рис. 3.6 используется, например, как типовое радиотехническое звено, при этом $K_1(p)$ — передаточная функция радиоусилителя (УПЧ), НЭ — детектор, $K_2(p)$ — передаточная функция видеофильтра. К схе-

ме III сводятся обычно следящие системы радиоустройств, при этом характеристика нелинейного элемента описывает дискриминационную кривую.

Нелинейные системы IV класса могут быть заданы в виде принципиальной схемы, как, например, схемы амплитудного и частотного детекторов, у которых существенно влияние реактивной нагрузки на нелинейные элементы (диоды), или в виде нелинейных дифференциальных уравнений (системы уравнений), описывающих процессы в системе, например аэродинамические дифференциальные уравнения движения летательного аппарата.

Приведенная классификация нелинейных систем является в определенном смысле условной. Одну и ту же систему можно отнести к тому или другому классу, в зависимости от существа решаемой задачи, т. е. в зависимости от характера ее постановки, целей решения, точности воспроизведения процессов в системе, наличия априорных сведений о характеристиках системы и т. п. Так, например, амплитудный детектор в случаях, когда емкостный фильтр не имеет развязки с нелинейным элементом, строго говоря, является нелинейной системой IV класса, однако при определенном выборе параметров его можно отнести к системам II класса [80] (типовое радиотехническое звено), а по характеру преобразования огибающей входного колебания — к системам I класса, т. е. к безынерционному нелинейному звену, преобразующему огибающую $V(t)$ в напряжение $v(t) = f_d[V(t)]$, где f_d — детекторная характеристика. В последнем случае детектор выполняет свое функциональное назначение — выделение огибающей или же некоторой функции от огибающей. При такого рода эквивалентных преобразованиях нелинейных систем используются заранее известные характеристики этих систем, полученные теми или иными методами. Эти преобразования позволяют упростить цифровые модели.

Для преобразования нелинейных систем IV класса в эквивалентные системы III класса можно использовать богатый опыт составления функциональных электронных схем для решения нелинейных дифференциальных уравнений на аналоговых вычислительных машинах [40, 52].

Рассмотрим возможные способы цифрового моделирования нелинейных систем различных классов.

2. Моделирование безынерционных нелинейных систем

Моделирование нелинейных безынерционных звеньев осуществляется весьма просто: на ЦВМ производится нелинейное функциональное преобразование входного сигнала $u(t)$ в соответствии с характеристикой нелинейности звена $y=f(x)$ в виде

$$v[n]=f[u[n]].$$

Способы нелинейных преобразований входной величины $u[n]$ в выходную величину $v[n]$, используемые для имитации на ЦВМ нелинейных звеньев, зависят от того, в какой форме задана характеристика нелинейности. Если характеристика нелинейности задана в виде аналитического выражения (например, полинома), то преобразование осуществляется путем вычисления по формуле. Если функция $y=f(x)$ задана таблицей или графически, то в ЦВМ вводятся ее табличные значения и преобразование производится путем выборки из таблиц с использованием интерполяции.

3. Моделирование инерционных нелинейных разомкнутых функциональных систем

Моделирование нелинейных систем II класса также не встречает затруднений. В этом случае дискретные функции, соответствующие непрерывным сигналам в различных точках системы, вычисляются последовательно путем применения описанных выше алгоритмов моделирования к отдельным линейным динамическим звеньям и нелинейным безынерционным звеньям.

Пример 1. Пусть требуется получить алгоритм преобразования дискретных значений входного сигнала $u[n]$, действующего на нелинейную систему, блок-схема которой показана на рис. 3.7,а, в дискретные значения выходного сигнала $v[n]$. Положим, что динамические звенья $K_1(p)$ и $K_2(p)$ являются линейными звеньями с постоянными сосредоточенными параметрами первого и второго порядка соответственно. Положим также для определенности, что характеристика нелинейного элемента является экспоненциальной вида

$$y = e^{ax}.$$

Для построения цифровой модели системы заменим непрерывные фильтры $K_1(p)$ и $K_2(p)$ соответствующими дискретными фильтрами, используя методы дискретной аппроксимации, данные в § 3.3. В результате непрерывной нелинейной системе будет поставлена

в соответствие эквивалентная дискретная нелинейная система, у которой передаточные функции $K_{*1}(z)$ и $K_{*2}(z)$ в общем случае имеют вид

$$K_{*1}(z) = \frac{a'_0 + a'_1 z}{1 + b'_1 z}, \quad K_{*2}(z) = \frac{a''_0 + a''_1 z + a''_2 z^2}{1 + b''_1 z + b''_2 z^2},$$

где постоянные коэффициенты перед z^k определяются параметрами непрерывных фильтров, шагом дискретизации и методом дискретной аппроксимации.

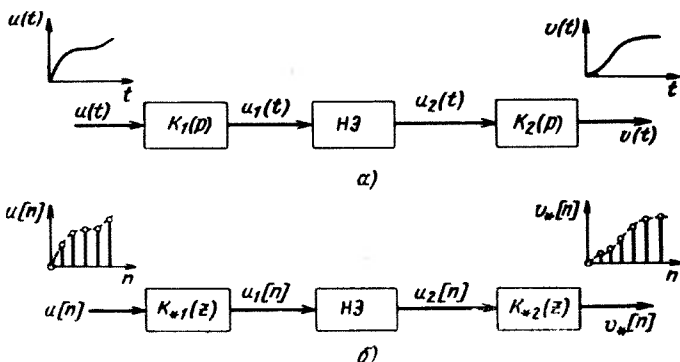


Рис. 3.7.

Переходя от передаточных функций $K_{*1}(z)$ и $K_{*2}(z)$ к рекуррентным уравнениям, получим следующую последовательность операций преобразования сигнала $u[n]$ в сигнал $v[n]$ (рис. 3.8,б):

$$u_1[n] = a'_0 u[n] + a'_1 u[n-1] - b'_1 u_1[n-1],$$

$$u_2[n] = e^{au_1[n]}, \quad (3.105)$$

$$v_*[n] = a''_0 u_2[n] + a''_1 u_2[n-1] + a''_2 u_2[n-2] - b''_1 v_*[n-1] - b''_2 v_*[n-2].$$

Для осуществления на быстродействующей ЦВМ преобразований (3.105) требуется весьма немного времени. Это дает возможность в короткий срок производить многократные вычисления, например в целях получения статистических характеристик при случайном воздействии на входе нелинейной системы.

При однократных вычислениях, например при построении переходного процесса в нелинейной системе, уравнения (3.105) можно использовать в качестве экономичных расчетных формул для реализации на клавишных вычислительных машинах (в данном случае с использованием таблиц функции e^x).

4. Моделирование инерционных нелинейных функциональных замкнутых систем

Сложнее обстоит дело с цифровым моделированием замкнутых функциональных нелинейных систем (системы III класса).

Пример 2. Рассмотрим нелинейную систему, показанную на рис. 3.8,а, у которой нелинейный элемент стоит в прямой цепи петли обратной связи. Положим, что линейный фильтр с передаточной функцией $K(p)$ является системой второго порядка. Заменяв этот фильтр дискретным фильтром (рис. 3.8,б) с передаточной функцией

$$K_*(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{1 + b_1 z + b_2 z^2},$$

получим следующие уравнения, описывающие преобразования сигнала $u[n]$ в эквивалентной дискретной нелинейной системе:

$$\begin{aligned} \varepsilon[n] &= u[n] - v_*[n], \\ \varepsilon_1[n] &= f(\varepsilon[n]) = f(u[n] - v_*[n]), \\ v_*[n] &= a_0 \varepsilon_1[n] + a_1 \varepsilon_1[n-1] + a_2 \varepsilon_1[n-2] - \\ &- b_1 v_*[n-1] - b_2 v_*[n-2] = a_0 f(u[n] - v_*[n]) + \\ &+ a_1 \varepsilon_1[n-1] + a_2 \varepsilon_1[n-2] - b_1 v_*[n-1] - b_2 v_*[n-2]. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Поскольку вычисления производятся рекуррентно, все величины в последнем уравнении в (3.106), кроме $v_*[n]$, можно считать известными. Поэтому для нахождения интересующего нас неизвестного значения $v_*[n]$ требуется решить относительно $v_*[n]$ нелинейное уравнение

$$v_*[n] = a_0 f(u[n] - v_*[n]) + c_n, \quad (3.107)$$

где $c_n = a_1 \varepsilon_1[n-1] + a_2 \varepsilon_1[n-2] - b_1 v_*[n-1] - b_2 v_*[n-2]$.

Уравнение (3.107) требуется решать на каждом шаге. Наиболее общим методом решения является метод итераций. Для простых нелинейностей решение этого уравнения иногда удается записать в виде формулы, например, если $f(x) = x^2$, то

$$v_*[n] = a_0 (u^2[n] - 2u[n]v_*[n] + v_*^2[n]) + c_n$$

или

$$Av_*^2[n] - B_nv_*[n] + C_n = 0,$$

где $A = a_0$, $B_n = 1 + 2u[n]$, $C_n = a_0 u^2[n] + c_n$.

Отсюда

$$v_*[n] = \frac{B_n \pm \sqrt{B_n^2 - 4AC_n}}{2A}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что особенно-стью цифровой модели данной нелинейной системы, со-

держашей нелинейный элемент в замкнутом контуре, является необходимость решать на каждом шаге нелинейное алгебраическое уравнение при условии, если линейные динамические звенья системы моделируются с помощью рекуррентных уравнений. Нетрудно убедиться, что такое положение всегда имеет место при цифровом моделировании замкнутых функциональных нелинейных систем.

Необходимость решения нелинейных уравнений усложняет цифровые модели замкнутых нелинейных систем по сравнению с цифровыми моделями разомкнутых нелинейных систем. Это затруднение легко обойти, если в цепь обратной связи эквивалентной импульсной системы ввести дополнительно элемент задержки на один период (рис. 3.8,в). Тогда необходимость решения уравнения вида (3.107) отпадает, и цифровая модель замкнутой нелинейной системы оказывается почти столь же простой, как и модель разомкнутой системы.

Действительно, уравнение (3.107) в этом случае принимает вид

$$v_*[n] = a_* f(u[n] - v_*[n-1]) + c_n. \quad (3.108)$$

Вычисление текущего значения сигнала на выходе замкнутой системы по уравнению (3.108) сводится к нелинейному преобразованию известных $(u[n], u[n-1], u[n-2])$ и заранее вычисленных $(v_*[n-1], v_*[n-2])$ величин.

Следует заметить, что введение элемента запаздывания вносит дополнительную погрешность в цифровую модель. Однако при достаточно малом шаге дискретизации влияние этой погрешности практически незначительно. При $\Delta t \rightarrow 0$ эквивалентная дискретная система с элементом задержки (рис. 3.8,в) так же, как и эквивалентная дискретная система без элемента задержки (рис. 3.8,б), совпадает с исходной непрерывной системой (рис. 3.8,а).

В настоящее время не представляется возможным дать некоторые единые рекомендации для выбора шага дискретизации Δt , при котором можно пренебречь влиянием элемента запаздывания на величину погрешности моделирования. Это обусловлено как большим разнообразием нелинейных систем, так и недостаточной изученностью рассматриваемого вопроса. Опыт моделирования

замкнутых нелинейных систем радиоавтоматики (следящих координаторов), содержащих один нелинейный элемент с характеристикой нелинейности в виде дискриминационной кривой, показал, что влияние элемента запаздывания практически не ощущается при $\Delta t \leq T_0/10$, где T_0 — постоянная времени замкнутой следящей систе-

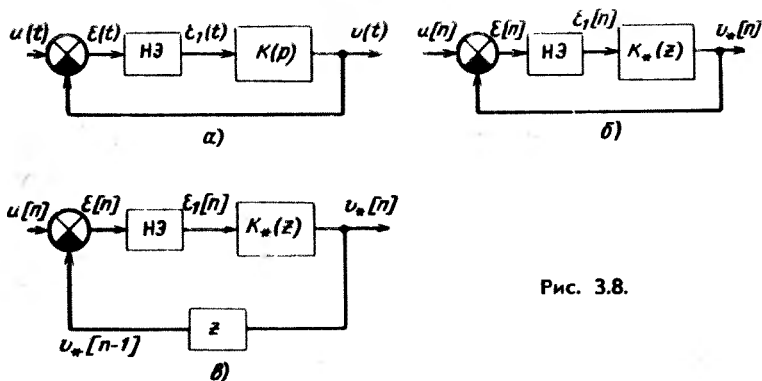


Рис. 3.8.

мы в линейном режиме (см. § 4.3). Это соотношение, по-видимому, можно использовать для ориентировочного выбора шага дискретизации и при моделировании других замкнутых нелинейных систем.

Увеличения точности при заданном шаге дискретизации в системе с элементом задержки можно достичь, используя метод фирмы ИВМ, основанный на сочетании метода корневых годографов с методом z -преобразования или же метод квазилинеаризации. Примеры применения этих методов даны в [109].

5. Моделирование инерционных нелинейных нефункциональных систем

Моделирование на ЦВМ нелинейных систем IV класса в общем случае может быть осуществлено с помощью стандартных алгоритмов численного интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений, таких, как метод Рунге—Кутта, метод Адамса и др. Метод Рунге—Кутта является одним из наиболее известных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. Приведем наиболее распространенную фор-

мулировку этого метода (метод Рунге—Кутта четвертого порядка).

Пусть задана система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}). \quad (3.109)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — N -мерный вектор (вектор-функция).

Значения неизвестной вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ в дискретных точках $t_n = n\Delta t$ по методу Рунге—Кутта вычисляются рекуррентно:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n] = & \mathbf{x}[n-1] + \frac{1}{6} (\alpha_1[n-1] + 2\alpha_2[n-2] + \\ & + 2\alpha_3[n-1] + \alpha_4[n-1]), \end{aligned} \quad (3.110)$$

где $\mathbf{x}[n] = \mathbf{x}(n\Delta t)$; $\alpha_1[n] = \Delta t f(n\Delta t, \mathbf{x}[n])$;

$$\alpha_2[n] = \Delta t f(n\Delta t + \Delta t/2, \mathbf{x}[n] + \alpha_1[n]/2),$$

$$\alpha_3[n] = \Delta t f(n\Delta t + \Delta t/2, \mathbf{x}[n] + \alpha_2[n]/2),$$

$$\alpha_4[n] = \Delta t f(n\Delta t + \Delta t, \mathbf{x}[n] + \alpha_3[n]).$$

Если нелинейная динамическая система описывается одним или несколькими дифференциальными уравнениями порядка выше первого, то для использования алгоритма (3.110) требуется свести уравнения высших порядков к системе (3.109) уравнений первого порядка. Такое преобразование, как известно [3], всегда возможно и осуществляется достаточно просто.

Дискретная аппроксимация по методу Рунге—Кутта применима, конечно, и для систем II и III классов, а также для линейных систем. Однако этот метод, как и другие стандартные методы численного интегрирования, при той же точности по объему вычислений обычно *менее эффективен*, чем рассмотренные выше методы цифрового моделирования [109]; к тому же стандартные методы не обладают той физической наглядностью, какую имеют методы дискретной аппроксимации по принципу замены непрерывных систем дискретными системами.

3.6. Моделирование типовых нелинейных преобразований сигналов и помех в радиосистемах

Типовыми нелинейными операциями в радиосистемах являются операции модуляции, преобразования частоты (в том числе и умножения частоты) и демодуляции (детектирования). Для физического осуществления этих операций используются, как известно, различные нелинейные управляемые элементы совместно с фильтрами. Одним из принципов моделирования на ЦВМ нелинейных систем, осуществляющих указанные операции, с целью получения алгоритмов преобразования сигналов и помех в этих системах является воспроизведение на ЦВМ нелинейных уравнений, описывающих динамику рассматриваемых систем. При этом в зависимости от обстоятельств конкретной задачи могут быть использованы те или иные ранее описанные общие методы моделирования нелинейных систем.

В связи с тем, что задача разработки моделирующих алгоритмов по такому принципу ближе примыкает к вопросам математического обеспечения при использовании цифровых вычислительных машин для анализа нелинейных цепей, мы не будем останавливаться на подробности ее решения.

Рассмотрим моделирование на ЦВМ типовых нелинейных преобразований радиосигналов и радиопомех, основанное на функциональном принципе.

1. Модуляция

Операции модуляции входят в математические модели радиосигналов и радиопомех. Поэтому воспроизведение на ЦВМ операций модуляции осуществляется, в сущности, при реализации цифровых моделей радиосигналов и радиопомех (§ 1.1).

2. Преобразование частоты

Назначением операций преобразования частоты является некажущий перенос спектра сигнала с одной средней частоты ω_0 (несущей) на другую среднюю частоту $\omega_{\text{пр}}$ (промежуточную). С функциональной точки зрения такое преобразование, очевидно, сводится просто к замене в математической модели сигнала с частотой ω_0 сигналом с частотой $\omega_{\text{пр}}$. При описании радиосистем по методу огибающих эта замена эквивалентна тождественному преобразованию.

Если требуется с помощью ЦВМ исследовать более детальные изменения в сигналах, происходящие в конкретной схеме преобразо-

вателя частоты, например нелинейные искажения, появление дополнительных гармоник и т. п., то в этом случае нужно воспроизвести на ЦВМ цифровую модель нелинейной динамической системы, каковой является данный преобразователь частоты, используя описанные выше методы цифрового моделирования.

3. Детектирование

Рассмотрим теперь возможные способы моделирования нелинейных операций, осуществляемых над радиосигналами и помехами при различных видах детектирования, основанные на функциональном подходе и методе огибающих.

Пусть задан некоторый узкополосный процесс

$$u(t) = \operatorname{Re} \mathbf{U}(t) e^{j\omega_0 t} = \operatorname{Re} U(t) e^{j\varphi_u(t)} e^{j\omega_0 t} \quad (3.111)$$

в виде последовательности дискретных значений $\mathbf{U}[n]$ его комплексной амплитуды $\mathbf{U}(t)$ или же в виде последовательностей значений $U_1[n]$ и $U_2[n]$ его квадратурных компонент $U_1(t) = \operatorname{Re} \mathbf{U}(t)$ и $U_2(t) = \operatorname{Im} \mathbf{U}(t)$. Требуется найти алгоритмы, которые позволяли бы по известному дискретному комплексному процессу $\mathbf{U}[n]$ получать последовательности значений процессов $U(t)$, $\varphi_u(t)$, $\cos \varphi_u(t)$, $\sin \varphi_u(t)$, $\Omega(t) = \frac{d}{dt} \varphi_u(t)$, выделяемых при различных видах идеального детектирования: амплитудного фазового и частотного.

Такие алгоритмы легко предложить, используя известные формулы, выражающие параметры колебания (3.111) (амплитуду $U(t)$, фазу $\varphi_u(t)$, частоту $\Omega(t)$ и др.) через комплексную огибающую $\mathbf{U}(t)$ и квадратурные составляющие $U_1(t)$, $U_2(t)$, а именно:

$$\begin{aligned} U(t) &= |\mathbf{U}(t)| = \sqrt{U_1^2(t) + U_2^2(t)}, \\ \varphi_u(t) &= \arg \mathbf{U}(t) = \operatorname{arctg} \frac{U_2(t)}{U_1(t)} = \int_0^t \Omega(t) dt, \\ \cos \varphi_u(t) &= \cos \operatorname{arctg} \frac{U_2(t)}{U_1(t)} = \frac{U_1(t)}{\sqrt{U_1^2(t) + U_2^2(t)}}, \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\sin \varphi_u(t) = \sin \operatorname{arctg} \frac{U_2(t)}{U_1(t)} = \frac{U_2(t)}{\sqrt{U_1^2(t) + U_2^2(t)}},$$

$$\Omega(t) = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{U_2(t)}{U_1(t)} = \frac{U_1(t) U_2'(t) - U_2(t) U_1'(t)}{U_1^2(t) + U_2^2(t)}.$$

Подвергая формулы (3.112) дискретизации и заменяя при этом интеграл суммой, а производные — их первыми разностями, получим искомые алгоритмы:

$$U[n] = \sqrt{U_1^2[n] + U_2^2[n]},$$

$$\varphi_u[n] = \operatorname{arctg} \frac{U_2[n]}{U_1[n]} = \Delta t \Omega[n] + \varphi_u[n-1],$$

$$\cos \varphi_u[n] = \frac{U_1[n]}{\sqrt{U_1^2[n] + U_2^2[n]}}, \quad \sin \varphi_u[n] = \frac{U_2[n]}{\sqrt{U_1^2[n] + U_2^2[n]}},$$

$$\Omega[n] = \frac{1}{\Delta t} \frac{U_1[n](U_2[n] - U_2[n-1]) - U_2[n](U_1[n] - U_1[n-1])}{U_1^2[n] + U_2^2[n]} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \frac{U_2[n]U_1[n-1] - U_1[n]U_2[n-1]}{U_1^2[n] + U_2^2[n]}.$$

Следует сделать некоторые замечания к формулам (3.113). Эти формулы являются простыми алгоритмами преобразования дискретных квадратурных компонент узкополосного процесса в дискретные значения изменяющихся во времени параметров процесса, для выделения которых служат различные виды детекторов. Реальные детекторы реализуют преобразования (3.113) приближенно. Так, например, амплитудный детектор практически выделяет не саму огибающую $U(t)$, а некоторую функцию от нее. Эта функция для детектора на вакуумном диоде при большом сопротивлении нагрузки хорошо аппроксимируется выражением [27]

$$A = \ln I_0(U),$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Реальный амплитудный детектор обладает также инерционностью. Аналогичным образом отличаются от

идеальных реальные фазовые и частотные детекторы. У реального частотного детектора нелинейная зависимость выходного эффекта от частоты входного сигнала имеет вид дискриминационной кривой. Реальные фазовые детекторы обычно выделяют фазу сигнала по модулю 2π или π (приведенная фаза) и обладают нелинейностью.

Все априорно известные отличия реальных детекторов от идеальных в случае необходимости нетрудно учесть при цифровом моделировании, подвергнув идеальные параметры, получаемые по формулам (3.113), нелинейному преобразованию в соответствии с нелинейной зависимостью выходного эффекта детектора от соответствующего входного параметра. Для имитации инерционности можно использовать линейный фильтр с соответствующей постоянной времени.

Достоинством алгоритмов идеального детектирования и алгоритмов, полученных на основе алгоритмов идеального детектирования путем введения коррекции с учетом характеристик реальных детекторов, является возможность исключить из рассмотрения трудоемкие операции нелинейных инерционных преобразований быстроосциллирующих функций и оперировать лишь с медленно меняющимися квадратурными компонентами детектируемых колебаний.

Алгоритмы формирования дискретной фазы и дискретной частоты [вторая и пятая формулы из (1.113)] можно уточнить, если использовать более точные формулы численного интегрирования и дифференцирования. В приведенных формулах дискретные фильтры, осуществляющие дифференцирование и интегрирование, имеют простейшие передаточные функции соответственно:

$$K_{*д}(z) = \frac{1-z}{\Delta t}, \quad K_{*и}(z) = \frac{1}{K_{*д}(z)} = \frac{\Delta t}{1-z}.$$

Более точные операторы дискретного интегрирования помещены в табл. 3.2. В частности, повышенной точностью обладает оператор дискретного интегрирования

$$K_{*и}(z) = \frac{\Delta t}{2} \frac{1+z}{1-z},$$

которому соответствует оператор дифференцирования

$$K_{*д}(z) = \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z}{1+z}.$$

При использовании этих операторов алгоритмы формирования дискретной фазы и дискретной частоты запишутся в виде:

$$\varphi_u(t) = \frac{\Delta t}{2} \Omega[n] + \frac{\Delta t}{2} \Omega[n-1] + \varphi_u[n-1],$$

$$\Omega[n] = \frac{U_1[n] \Delta U_2[n] - U_2[n] \Delta U_1[n]}{U_1^2[n] + U_2^2[n]}, \quad (3.114)$$

где

$$\Delta U_1[n] = \frac{2}{\Delta t} U_1[n] - \frac{2}{\Delta t} U_1[n-1] - \Delta U_1[n-1];$$

$$\Delta U_2[n] = \frac{2}{\Delta t} U_2[n] - \frac{2}{\Delta t} U_2[n-1] - \Delta U_2[n-1].$$

Рассмотрим еще одну распространенную операцию детектирования, а именно фазовое детектирование в случаях, когда в качестве опорного колебания в фазовом детекторе используется не чисто гармоническое колебание, а модулированное колебание

$$u_{\text{оп}}'(t) = \text{Re } U_{\text{оп}}(t) e^{j\omega_0 t}, \quad (3.115)$$

где $U_{\text{оп}}(t)$ — комплексный закон модуляции опорного колебания (предполагается, что функция $U_{\text{оп}}'(t)$ медленно меняется по сравнению с $e^{j\omega_0 t}$).

Операцию фазового детектирования обычно можно представить как умножение входного колебания (3.111) на опорное колебание (3.115) с последующей фильтрацией низкочастотной составляющей спектра произведения. Такое представление позволяет найти простой алгоритм для моделирования фазового детектора.

Действительно, при принятых условиях выходной эффект фазового детектора имеет вид

$$v(t) = \overline{\text{Re } U(t) e^{j\omega_0 t} \text{Re } U_{\text{оп}}(t) e^{j\omega_0 t}}, \quad (3.116)$$

где черта сверху означает операцию выделения низкочастотной части спектра. Согласно известному тождеству

$$\text{Re } z_1 \text{Re } z_2 = \frac{1}{2} \text{Re } z_1 z_2^* + \frac{1}{2} \text{Re } z_1 z_2$$

выражение (3.116) преобразуется к виду

$$v(t) = \frac{1}{2} \text{Re } U(t) U_{\text{оп}}^*(t) + \frac{1}{2} \text{Re } U(t) U_{\text{оп}}(t) e^{j2\omega_0 t}. \quad (3.117)$$

Второе слагаемое в формуле (3.117) как высокочастотное отфильтровывается. Тогда, если положить, что первое низкочастотное слагаемое выделяется фильтром без искажений, окончательно получим

$$v(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} U(t) U_{\text{он}}^*(t) \quad (3.118)$$

или в дискретной форме

$$v[n] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} U[n] U_{\text{он}}^*[n]. \quad (3.119)$$

Таким образом, операцию фазового детектирования можно рассматривать как выделение реальной части произведения комплексной амплитуды входного колебания на комплексно-сопряженную амплитуду опорного колебания. В частном случае, если опорное колебание не модулировано и его комплексная амплитуда равна 1 или $e^{j\pi/2}$, фазовый детектор согласно формуле (3.118) выделяет квадратурные компоненты входного колебания

$$U_1(t) = \operatorname{Re} U(t), \quad U_2(t) = \operatorname{Re} U_1(t) e^{-j\pi/2} = \operatorname{Im} U(t). \quad (3.120)$$

Выражение (3.118) часто используется при описании процессов обработки сигналов в приемниках моноимпульсных радиолокаторов [84]. Формулу (3.118) и алгоритм (3.119) можно использовать также для описания и цифрового моделирования процессов корреляционной обработки узкополосных сигналов.

Для применения алгоритмов (3.113), (3.114) и (3.119) требуется знать квадратурные составляющие $U_1(t)$ и $U_2(t)$ или, что то же самое, комплексный закон модуляции $U(t)$ детектируемого колебания $u(t)$. При использовании метода огибающих для описания процессов в узкополосном преддетекторном фильтре квадратурные составляющие колебания $u(t)$ оказываются известными непосредственно. Если же колебание $u(t)$ задано последовательностью своих мгновенных значений, то для использования алгоритмов (3.113), (3.114) и (3.119) нужно каким-то образом, зная $u(t)$, выделить его квадратурные компоненты $U_1(t)$ и $U_2(t)$. Для этой цели предлагается использовать следующий прием.

Рассмотрим аналитическое выражение колебания

$$u(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_u(t)] = U_1(t) \cos \omega_0 t - U_2(t) \sin \omega_0 t.$$

Функция $\sin \omega_0 t$ в моменты времени $t_n = n\Delta t_0$, где $\Delta t_0 = 2\pi/\omega_0$, равна нулю. В эти же моменты времени функция $\cos \omega_0 t$ равна единице, следовательно,

$$u[n] = u(n\Delta t_0) = U_1(n\Delta t_0) = U_1[n]. \quad (3.121a)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} u\left[n - \frac{1}{4}\right] &= u\left(n\Delta t_0 - \frac{1}{4}\Delta t_0\right) = \\ &= U_2\left(n\Delta t_0 - \frac{1}{4}\Delta t_0\right) = U_2\left[n - \frac{1}{4}\right]. \end{aligned} \quad (3.121b)$$

Иначе говоря, существуют последовательности равностоящих точек $t_n = n\Delta t_0$ и $t_{n-1/4} = (n - 1/4)\Delta t_0$ оси времени, в которых графики функций $u(t)$, $U_1(t)$ и графики функций $u(t)$, $U_2(t)$ соответственно пересекаются. Этот факт иллюстрирует рис. 3.9 на примере частотно-модулированного по линейному закону радиоимпульса

$$u(t) = \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{2T} t^2\right), \quad |t| \leq T/2, \quad (3.122)$$

где T — длительность импульса; $\Delta\Omega = 2\pi\Delta F$ — девиация частоты.

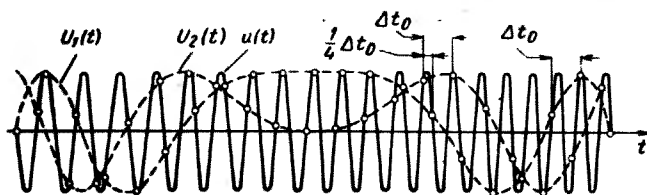


Рис. 3.9.

График построен для $\Delta\Omega = \omega_0/2$ и $\Delta FT = 10$. Пунктиром даны квадратурные компоненты

$$U_1(t) = \cos \frac{\Delta\Omega}{2T} t^2, \quad U_2(t) = \sin \frac{\Delta\Omega}{2T} t^2.$$

Сигналы, показанные пунктиром, реально являются выходным эффектом при фазовом детектировании частотно-модулированного колебания (3.122) двумя фазовыми детекторами, у которых опорные колебания когерентны и сдвинуты по фазе на 90° [см. (3.120)].

Таким образом, для выделения дискретных квадратурных составляющих некоторого узкополосного процес-

са достаточно произвести выборки значений этого процесса в точках t_n и $t_{n-1/4}$.

Поскольку квадратурные составляющие $U_1(t)$, $U_2(t)$ узкополосного процесса практически очень мало изменяются в течение четверти периода Δt_0 , то в алгоритме (3.121б) можно приближенно считать

$$U_2[n - 1/4] = U_2[n]. \quad (3.123)$$

Тогда окончательный алгоритм выделения дискретных квадратурных составляющих можно записать в виде

$$U_1[n] = u[n], \quad U_2[n] = u[n - 1/4] \quad (3.124)$$

Если погрешностью замены (3.123) пренебречь нельзя, значение $U_2[n]$ можно уточнить, используя интерполяцию, например, между

$$U_2\left[n - \frac{1}{4}\right] \text{ и } U_2\left[n + \frac{1}{4}\right] = -u\left(n\Delta t_0 + \frac{1}{4}\Delta t_0\right).$$

Для увеличения точности алгоритмов дискретного выделения квадратурных составляющих имеется возможность уменьшения шага дискретизации вдвое по сравнению с $\Delta t_0 = 2\pi/\omega_0$. При этом, как легко видеть,

$$\begin{aligned} U_1[n] &= (-1)^n u\left[\frac{n}{2}\right], \\ U_2\left[n - \frac{1}{4}\right] &= (-1)^n u\left[\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Если шаг дискретизации Δt_0 весьма мал (при весьма узкополосном процессе), так что представление квадратурных составляющих оказывается излишне подробным, то можно увеличить шаг Δt_0 в целое число раз. Тогда алгоритм выделения квадратурных составляющих запишется в виде

$$U_1[n] = u[nk], \quad U_2[n] = u[nk - 1/4], \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.126)$$

Итак, для моделирования на ЦВМ операций детектирования узкополосного процесса $u(t)$ согласно предложенному методу требуется два основных вида преобразований: выборка значений колебания $u(t)$ в дискретных равноотстоящих точках по формулам (3.124) — (3.126) и вычисление дискретных последовательностей

значений параметров этого колебания (амплитуды, фазы и т. д.) в соответствии с алгоритмами (3.113), (3.119).

Заканчивая рассмотрение данного метода, целесообразно сделать следующее замечание. Рассмотренные алгоритмы позволяют по имеющейся записи узкополосного процесса выделить в дискретной форме его заранее неизвестные законы модуляции. При этом должно быть точно зафиксировано начало отсчета времени, т. е. положение нуля на оси времени при модуляции и при детектировании должно быть одним и тем же. Реально это соответствует когерентному детектированию, когда в качестве опорного напряжения в фазочувствительных детекторах используется высокостабильная несущая.

Оценим, к чему приведет детектирование по описанному методу при произвольном выборе начала отсчета времени, эквивалентном тому, что вместо точек фиксации $t_n = n\Delta t_0$,

$$t_{n-\frac{1}{4}} = \left(n - \frac{1}{4}\right) \Delta t_0 \text{ мгновенных значений колебания } u(t)$$

берутся точки $t'_n = t_n + \theta$, $t'_{n-\frac{1}{4}} = t_{n-\frac{1}{4}} + \theta$, где θ — произвольно взятое значение временного сдвига из интервала времени $(0, \Delta t_0)$.

Сдвиг точек фиксации равносильен замене колебания на входе цифрового детектора

$$u(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_u(t)]$$

колебанием

$$u(t - \theta) = U(t - \theta) \cos[\omega_0 t + \varphi_u(t - \theta) - \omega_0 \theta].$$

Поскольку функции $U(t)$ и $\varphi_u(t)$ медленно меняются по сравнению с $\cos \omega_0 t$, погрешностью за счет временного сдвига этих функций на величину, не большую периода несущей, практически можно пренебречь, т. е. можно считать, что

$$u(t - \theta) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_u(t) - \varphi_0],$$

где $\varphi_0 = \omega_0 \theta$ — случайная фаза, равномерно распределенная в интервале $(0, 2\pi)$.

Следовательно, цифровое детектирование по данному методу при произвольном выборе начала отсчета времени эквивалентно детектированию колебания с неизвест-

ной (случайной) начальной фазой несущей частоты, что реально соответствует детектированию, когда в фазочувствительных детекторах вместо высокостабильной несущей в качестве опорного напряжения используется гармоническое колебание высокостабильного источника, независимого от генератора несущей.

При таком детектировании амплитудные и частотные законы модуляции выделяются, очевидно, с той же точностью как и при строго когерентном детектировании, а фазовый закон модуляции может быть выделен лишь с точностью до постоянной составляющей φ_0 . При детектировании колебаний со случайной равномерно распределенной начальной фазой нестабильность нуля времени, очевидно, никак не сказывается на статистических характеристиках выходного эффекта цифрового детектора.

3.7. Оценка погрешности дискретной аппроксимации непрерывных систем

При приближенной замене непрерывных систем дискретными системами возникает погрешность, в результате которой истинные значения $v[n]$ сигнала $v(t)$ на выходе непрерывной системы в точках $t_n = n\Delta t$ отличаются от вычисленных значений $v_*[n]$ на выходе дискретной системы. Ошибка $\Delta v[n] = v[n] - v_*[n]$, обусловленная дискретизацией, будет, вообще говоря, тем меньше, чем меньше шаг дискретизации Δt . В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ процессы в непрерывной и эквивалентной дискретной системах совпадают. Однако при уменьшении шага дискретизации увеличивается объем вычислений, поэтому шаг Δt целесообразно выбирать как можно большим, но удовлетворяющим заданной точности вычислений.

В настоящее время, к сожалению, не представляется возможным указать достаточно простой общий способ выбора значения шага дискретизации, обеспечивающего заданную точность при различных методах дискретизации. Можно лишь сказать, что ошибка вычисления дискретных значений сигнала на выходе непрерывной системы будет мала, если шаг дискретизации приближенно удовлетворяет условиям теоремы Котельникова. Для использования этой теоремы нужно знать ширину спектра сигнала и ширину полосы пропускания системы. Однако эта теорема не дает ответа на вопрос, какова

будет величина ошибки при заданном шаге дискретизации в реальных условиях, когда функции не имеют строго ограниченного спектра. Поэтому задача оценки погрешности дискретизации является предметом самостоятельных исследований.

В общем случае погрешность дискретной аппроксимации непрерывных систем зависит от шага дискретизации, метода дискретизации, вида входного сигнала, характеристик системы и, наконец, от выбранной числовой меры погрешности. Такое разнообразие факторов, влияющих на погрешность, существенно затрудняет ее количественную оценку. Поэтому обычно задачу оценки погрешности дискретной аппроксимации сужают. В первую очередь это относится к ограничению класса входных сигналов: оценку погрешности проводят при некоторых типовых (стандартных) воздействиях.

Часто погрешность дискретной аппроксимации непрерывных систем оценивают при воздействии в виде единичного скачка (оценка погрешности путем сравнения переходных процессов в непрерывной и дискретной системах [85, 109]). Суть такого метода состоит в следующем. При выбранном шаге дискретизации вычисляется переходная характеристика дискретной системы и сравнивается с аналогичной переходной характеристикой непрерывной системы. В качестве меры погрешности может быть выбрано, например, среднеквадратическое отклонение кривых. Если при выбранном шаге дискретизации различие переходных процессов велико, то, уменьшая шаг, можно добиться приемлемой точности дискретной аппроксимации.

Переходная характеристика дискретной линейной системы строится путем расчета по рекуррентным формулам вида (3.24) при $u[n]=1$, $n=0, 1, 2, \dots$ и нулевых начальных условиях, что легко осуществляется, например, с помощью настольной клавишной вычислительной машины. Для построения переходной характеристики непрерывной системы могут быть использованы хорошо известные из теории линейных систем автоматического регулирования методы (см., например, [45]), в частности метод получения переходной характеристики путем отыскания оригинала изображения $\frac{1}{p}K(p)$, где $K(p)$ — передаточная функция системы.

Если построение переходного процесса в непрерывной системе затруднительно, то шаг дискретизации практически можно выбрать следующим образом.

Строится последовательность переходных характеристик дискретной системы для ряда уменьшающихся (например, в два раза) значений шага дискретизации Δt . После этого выбирается то значение Δt , начиная с которого переходная характеристика практически не изменяется с уменьшением Δt . В основу такого приема положен тот факт, что при $\Delta t \rightarrow 0$ процессы в эквивалентной импульсной системе совпадают с процессами в непрерывной системе.

В качестве стандартного сигнала используется также гармоническое колебание (оценка погрешности путем сравнения частотных характеристик непрерывной и дискретной систем [85]).

Нетрудно найти общую формулу для такого сравнения. Действительно, частотная характеристика непрерывной системы с передаточной функцией $K(p)$ есть $K(j\omega)$. Частотная характеристика эквивалентной дискретной системы с передаточной функцией $K_*(z)$, как известно [85], получается из $K_*(z)$ путем замены z на $e^{-j\omega\Delta t}$, т. е. $K_*(j\omega) = K_*(z)$ при $z = e^{-j\omega\Delta t}$.

Функции $K(j\omega)$ и $K_*(e^{-j\omega\Delta t})$ имеют аналогичный смысл: для непрерывных систем $K(j\omega)$ означает то, что гармоническое колебание $e^{j\omega t}$, поданное на вход системы, вызывает на выходе в установившемся режиме гармоническую реакцию $v(t) = K(j\omega)e^{j\omega t}$; для дискретных систем $K_*(e^{-j\omega\Delta t})$ означает то, что дискретная гармоника $e^{j\omega\Delta t n}$ на входе системы вызывает на выходе системы в установившемся режиме дискретную гармонику $v[n] = K_*(e^{-j\omega\Delta t})e^{j\omega\Delta t n}$.

О погрешности дискретной аппроксимации можно судить по отношению частотных характеристик

$$\bar{K}(j\omega, \Delta t) = \frac{K_*(e^{-j\omega\Delta t})}{K(j\omega)}, \quad (3.127)$$

которое при выбранном шаге дискретизации равно отношению комплексной амплитуды гармоники на выходе дискретной системы к комплексной амплитуде гармони-

ки на выходе исходной непрерывной системы при одном и том же гармоническом воздействии с частотой ω на входах обеих систем. В области частот, где

$$\Delta \bar{K}(j\omega, \Delta t) = 1 - |\bar{K}(j\omega, \Delta t)| \approx 0,$$

$$\arg \bar{K}(j\omega, \Delta t) \approx 0,$$

будут малы соответственно амплитудные и фазовые погрешности дискретной аппроксимации. Зная передаточную функцию $K(p)$ и ее дискретный эквивалент $K_*(z)$ при различных методах дискретной аппроксимации (§ 3.2; 3.3), в каждом конкретном случае по формуле (3.127) можно довольно просто рассчитать погрешность дискретизации в частотной области. Примеры использования формулы (3.127) для оценки погрешности различных методов дискретной аппроксимации интегрирующего звена первого порядка даны в [85].

В некоторых работах [20, 26] оценивается ошибка дискретной аппроксимации непрерывных систем при стационарном случайном воздействии на входе. Поскольку случайный процесс представляет собой целый ансамбль сигналов, оценка погрешности при случайном воздействии дает некоторую усредненную величину погрешности по ансамблю сигналов, а не по одному какому-нибудь элементарному сигналу. Это является важным доводом в пользу такого рода оценок.

Ниже рассматриваются вопросы оценки среднеквадратической погрешности дискретной аппроксимации непрерывных систем, когда в качестве стандартного входного сигнала используется стационарный случайный процесс. Случайный сигнал является более сложным по структуре, чем элементарные стандартные сигналы в виде единичной ступеньки или гармонического колебания, но, несмотря на это, он позволяет найти довольно простые оценки погрешности, а при некоторых условиях даже более простые, чем при классических стандартных сигналах.

Пусть задана некоторая линейная непрерывная система с постоянными параметрами с передаточной функцией $K(p)$ и импульсной переходной характеристикой $h(t)$, на вход которой воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с энергетическим спектром $G(\omega)$.

Рассмотрим методы дискретизации заданной системы, которые соответствуют замене ее эквивалентной импульсной системой по схеме, представленной на рис. 3.1 (§ 3.2). К таким методам относятся метод z-преобразования (§ 3.3), который эквивалентен дискретизации непрерывной свертки с использованием формулы прямоугольников (§ 3.2); метод Цыпкина—Гольденберга; метод Рагазини—Бергена (§ 3.3).

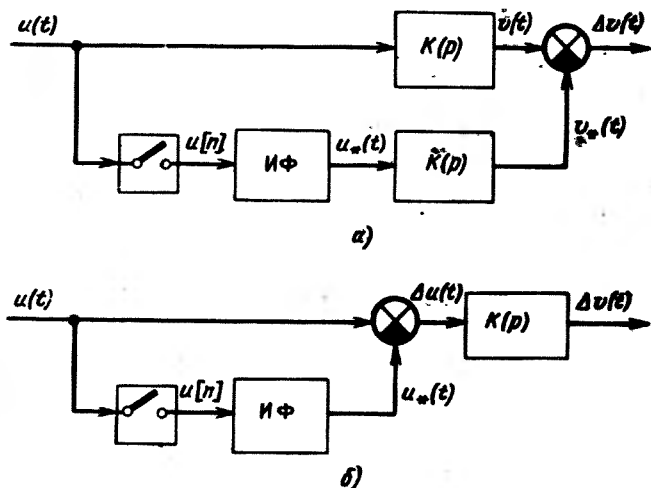


Рис. 3.10.

Различие между выходными сигналами непрерывной и эквивалентной импульсной системы образуется в результате неточного восстановления входного сигнала интерполирующим фильтром в схеме рис. 3.1. Ошибку выходного сигнала $\Delta v(t) = v(t) - v_*(t)$ в этом случае можно рассматривать как выходной сигнал схемы, показанной на рис. 3.10,а, которая, очевидно, эквивалентна схеме, представленной на рис. 3.10,б. Ошибка $\Delta v(t)$ является результатом преобразования ошибки интерполяции входного сигнала $\Delta u(t)$ заданной линейной системой. Корреляционно-спектральные характеристики ошибки $\Delta u(t)$ при различных видах интерполяции стационарных случайных сигналов были найдены в § 1.7. Зная их, легко можно найти характеристики ошибки выходного сигнала.

Действительно, если $G_{\Delta u}(\omega)$ — энергетический спектр ошибки интерполяции входного сигнала, то дисперсия иско-
мой ошибки равна

$$\sigma_{\Delta v}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{\Delta v}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{\Delta u}(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega,$$

где $G_{\Delta v}(\omega) = G_{\Delta u}(\omega) |K(j\omega)|^2$ — энергетический спектр иско-
мой ошибки.

Учитывая, что дисперсия выходного сигнала в рас-
сматриваемом случае равна

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega,$$

и используя формулу (1.42) для вычисления энергетиче-
ского спектра ошибки интерполяции входного сигнала,
получим следующее общее выражение для нахождения
относительной среднеквадратической погрешности вы-
ходного сигнала, возникающей в результате замены не-
прерывной линейной системы эквивалентной импульсной
системой

$$\Delta^2 = \frac{\sigma_{\Delta v}^2}{\sigma_v^2} = \frac{\int_0^{\infty} \left[G(\omega) \left(1 - \frac{2}{\Delta t} \operatorname{Re} K_0(j\omega) \right) + \frac{1}{\Delta t} \Phi(\omega) |K_0(j\omega)|^2 \right] |K(j\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} G(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (3.128)$$

где $K_0(j\omega)$ — частотная характеристика интерполирую-
щего фильтра; $\Phi(\omega)$ — энергетический спектр дискретно-
го случайного процесса $u[n]$.

Величину Δ^2 целесообразно принять в качестве меры
погрешности дискретной аппроксимации непрерывных
линейных систем. Формула (3.128) позволяет найти точ-
ное значение этой меры в виде зависимости от шага дис-
кретизации Δt , от метода дискретизации (характеризуе-
мого типом передаточной функции $K_0(j\omega)$ интерполирую-
щего фильтра), от энергетического спектра $G(\omega)$ вход-
ного случайного сигнала и от передаточной функции

$K(j\omega)$ заданной непрерывной системы. К сожалению, это выражение является довольно громоздким. Однако имеется возможность найти более простые приближенные оценки величины Δ^2 .

Действительно, если частота дискретизации входного сигнала в несколько раз превышает полосу пропускания системы, а спектр сигнала в области высоких частот убывает достаточно медленно, то в пределах полосы пропускания энергетический спектр ошибки интерполяции входного сигнала можно принять постоянным и равным $G_{\Delta u}(0)$ (см. рис. 1.7, на котором сплошными линиями (0, 1, 2, 3, 4) показаны примеры энергетических спектров $G_{\Delta u}(\omega)$ и пунктиром — частотная характеристика системы).

Тогда

$$\sigma_{\Delta v}^2 \approx G_{\Delta u}(0) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega = G_{\Delta u}(0) \int_0^{\infty} h^2(t) dt, \quad (3.129)$$

$$\Delta^2 \approx G_{\Delta u}(0) \frac{\int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} G(\omega) \|K(j\omega)\|^2 d\omega}. \quad (3.130)$$

Величина $G_{\Delta u}(0)$ может быть вычислена по формуле (1.44).

Поскольку у наиболее распространенных типов интерполирующих фильтров коэффициенты передачи на нулевой частоте $K_0(0)$ одинаковы и равны Δt (см. табл. 1.1), то согласно формуле (1.44)

$$G_{\Delta u}(0) = \Delta t \Phi(0) - G(0). \quad (3.131)$$

Из соотношений (1.129) — (1.131) следует, что погрешность дискретной аппроксимации слабо зависит от типа интерполирующего фильтра. На это указывалось в [18]. Однако этот эффект не имеет абсолютного характера: он наблюдается только при выполнении указанных выше условий. В частности, им нельзя пользоваться в случаях, когда спектр входного сигнала в области частот выше частоты дискретизации резко убывает или же равен нулю.

Дополнительное упрощение оценки величины Δ^2 можно получить, если учесть следующее обстоятельство. Пусть $\Delta_0^2 = \sigma_{\Delta u}^2 / \sigma_u^2$ — отношение дисперсии ошибки интерполяции входного сигнала к дисперсии самого сигнала. После прохождения процессов $\Delta u(t)$ и $u(t)$ через заданную линейную систему отношение их дисперсий будет равно искомой величине Δ^2 . Спектр ошибки интерполяции входного сигнала обычно в несколько раз шире спектра самого сигнала, следовательно, у процесса $\Delta u(t)$ доля дисперсии, приходящаяся на высокочастотные составляющие, больше чем у процесса $u(t)$. При прохождении этих процессов через заданную систему (при условии, что она пропускает в основном низкие частоты) высокочастотные составляющие отфильтровываются (см. рис. 1.7), так что отношение дисперсии этих процессов уменьшается. Следовательно, в этих случаях

$$\Delta^2 \leq \Delta_0^2. \quad (3.132)$$

Таким образом, при достаточно широких условиях относительная погрешность выходного сигнала Δ^2 , возникающая в результате замены непрерывной системы дискретной системой, не превышает относительной погрешности интерполяции входного сигнала Δ_0^2 . Величина Δ_0^2 может быть найдена по формулам, выведенным в § 1.7, в частности по формулам (1.48).

Рассмотрим теперь несколько иное использование приведенной здесь методики нахождения погрешности дискретной аппроксимации непрерывных систем.

Пусть в качестве моделируемой системы задана некоторая линейная непрерывная следящая система с передаточной функцией $K(p)$. Если $u(t)$ и $v(t)$ — входной и выходной сигналы системы соответственно, то ошибка слежения будет равна $\Delta u_0(t) = u(t) - v(t)$. При замене непрерывной следящей системы эквивалентной импульсной следящей системой ошибка слежения будет равна $\Delta u_*(t) = u(t) - v_*(t)$.

Погрешность дискретной аппроксимации в этом случае можно оценить, сопоставляя дисперсии $\sigma_{\Delta u_0}^2$ и $\sigma_{\Delta u_*}^2$ ошибок $\Delta u_0(t)$ и $\Delta u_*(t)$ при случайном стационарном входном сигнале.

Дисперсию ошибки $\Delta u_0(t)$ можно, очевидно, выразить в виде

$$\sigma_{\Delta u_0}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) |1 - K(j\omega)|^2 d\omega.$$

Для вычисления дисперсии ошибки $\Delta u_*(t)$ можно воспользоваться формулой (1.42), если заменить в ней $K_0(j\omega)$ произведением $K_0(j\omega)K(j\omega)$, т. е. заменить передаточную функцию интерполирующего фильтра переда-

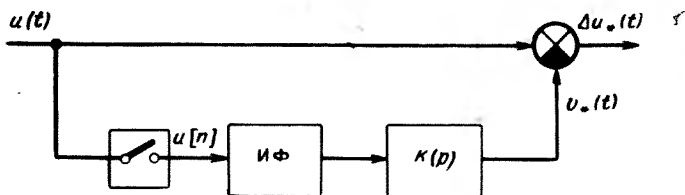


Рис. 3.11.

точной функцией приведенной непрерывной части. В этом легко убедиться, сравнивая рис. 3.11 и 1.6, на которых показаны схемы формирования ошибок $\Delta u_*(t)$ и $\Delta u_0(t)$ [на рис. 1.6 это $\Delta u(t)$] соответственно.

Отношение искомых дисперсий будет равно

$$\Delta_*^2 = \frac{\sigma_{\Delta u_*}^2}{\sigma_{\Delta u_0}^2} = \frac{\int_0^{\infty} \left[G(\omega) \left(1 - \frac{2}{\Delta t} \operatorname{Re} K_0(j\omega) K(j\omega) \right) + \frac{1}{\Delta t} \Phi(\omega) \right] \times}{\int_0^{\infty} G(\omega) |1 - K(j\omega)|^2 d\omega \times |K_0(j\omega) K(j\omega)|^2 d\omega} \quad (3.133)$$

Величина Δ_*^2 наряду с величиной Δ^2 может служить еще одной мерой погрешности дискретной аппроксимации непрерывных следящих систем.

Пример 1. Рассмотрим применение полученных выше соотношений для оценки погрешности цифрового интегрирования стационарного экспоненциально-коррелированного случайного процесса $u(t)$. Корреляционная функция и энергетический спектр его, а также

энергетический спектр соответствующего дискретного случайного процесса $u[n]$ выражаются формулами (1.47).

Величину интеграла

$$v = \int_0^T u(t) dt \quad (3.134)$$

можно рассматривать как величину сигнала $v(t)$ в точке $t=T$, наблюдаемого на выходе непрерывной линейной системы, импульсная переходная характеристика и передаточная функция которой имеют соответственно вид

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T, \end{cases} \quad K(j\omega) = \frac{T \sin^2 \omega T/2}{(\omega T/2)^2} e^{-j\omega T/2}. \quad (3.135)$$

Вычисление интеграла (3.134) по различным формулам численного интегрирования с равным шагом дискретизации соответствует, как легко видеть, замене данной непрерывной системы эквивалентной импульсной системой по схеме рис. 1.4 с различными типами интерполирующих фильтров. В частности, при использовании формулы прямоугольников и формулы трапеций передаточные функции интерполирующих фильтров будут иметь вид, показанный в табл. 1.1 (№ 1, 2, 3). В результате дискретизации вычисленное значение v интеграла (1.134) будет отличаться от его истинного значения v .

Приведенных характеристик достаточно, чтобы, подставив их в выражения (3.129)—(3.132), найти соответствующие оценки погрешности цифрового интегрирования случайного процесса. Рассмотрим, в частности, случай, когда интервал интегрирования T в несколько раз больше времени корреляции процесса $u(t)$. Это означает, что полоса пропускания системы с передаточной функцией (3.135) существенно меньше ширины спектра входного сигнала $u(t)$ и тем более меньше ширины спектра ошибки интерполяции этого сигнала (§ 1.7, рис. 1.7). В таком случае согласно формулам (3.129), (3.131) дисперсия ошибки цифрового интегрирования (дисперсия разности $\Delta v = v - v_*$) не зависит от типа интерполирующего фильтра (т. е. метода интегрирования) и равна

$$\sigma_{\Delta v}^2 = [\Delta t \Phi(0) - G(0)] \int_0^T h^2(t) dt = [\Delta t \Phi(0) - G(0)] T.$$

Отсюда, используя выражения (1.47) и (3.135), легко получим

$$\sigma_{\Delta v}^2 = T \Delta t \left(\frac{\text{sh } \epsilon}{\text{ch } \epsilon - 1} - \frac{2}{\epsilon} \right), \quad \epsilon = \omega_* \Delta t. \quad (3.136)$$

Дисперсия самого интеграла (1.134) равна

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{8}{\pi \omega_*} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega T/2) d\omega}{\omega^2 (1 + 2\omega/\omega_*)^2} = \frac{2}{\omega_*} (\omega_* T + e^{-\omega_* T} - 1). \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае $T\omega_* \gg 1$, следовательно, $e^{-\omega_* T} \approx 0$ и

$$\sigma_v^2 = \frac{2}{\omega_*} (\omega_* T - 1). \quad (3.137)$$

Используя (3.136) и (3.137), относительную среднеквадратическую погрешность цифрового интегрирования можно выразить в виде

$$\Delta^2 = \frac{\sigma_{\Delta v}^2}{\sigma_v^2} = \frac{\theta}{\theta - 1} \left(\frac{1}{2} \frac{\epsilon \operatorname{sh} \epsilon}{\operatorname{ch} \epsilon - 1} - 1 \right), \quad (3.138)$$

где $\theta = \omega_* T$ — безразмерный параметр, равный отношению времени интегрирования ко времени корреляции случайного процесса (на уровне $1/e$).

При малых ϵ выражение (3.138) принимает вид

$$\Delta^2 = \frac{\theta}{\theta - 1} \frac{\epsilon^2}{6}. \quad (3.139)$$

Рассмотрим численный пример. Пусть $\epsilon = 0,7$ (при этом коэффициент корреляции между соседними дискретами входного сигнала равен 0,5) и $\theta = 3,5$.

Согласно (3.138) и (3.139) получаем соответственно $\Delta^2 = 0,07$ и $\Delta^2 = 0,11$. Видим, что формула (3.139) дает несколько завышенный результат. Сравнивая эти результаты с результатами § 1.7, убеждаемся, что относительная погрешность цифрового интегрирования значительно меньше относительной погрешности интерполяции входного сигнала [формула (1.48)].

Заметим, что данный численный пример рассматривался в работе [13], где иным методом получена формула оценки погрешности цифрового интегрирования случайных процессов. Сравнение численных результатов показывает полное их совпадение.

В заключение этого параграфа необходимо сделать некоторые замечания. Полученные формулы позволяют оценить среднеквадратическую погрешность выходного сигнала при наиболее распространенных методах дискретной аппроксимации непрерывных линейных систем, подверженных стационарному случайному воздействию. В ряде случаев полученные аналитические выражения для оценки отличаются простотой [формулы (3.129) — (3.132), (3.136) — (3.139)], что существенно облегчает их практическое использование. В общих случаях выражения для оценок оказываются более громоздкими.

При решении практических задач методом цифрового моделирования рассмотренные выше приемы оценки погрешности дают скорее лишь некоторое представление

о величине погрешности результатов, чем конкретную ее величину, так как практически решаемые задачи содержат обычно значительно более сложные преобразования сигналов и помех, чем простые линейные преобразования.

Чтобы получить дискретную модель сложной непрерывной системы, обладающую требуемой точностью, практически можно использовать следующий довольно эффективный прием. Сначала шаг дискретизации выбирается ориентировочно, исходя из данных выше оценок. Окончательно шаг дискретизации выбирается при реализации цифровой модели на ЦВМ путем проведения нескольких пробных решений задачи для различных последовательно уменьшающихся, например в два раза, значений шага дискретизации, начиная с выбранного значения шага и кончая тем значением шага, когда результаты решения практически перестают изменяться. Разница в результатах решения при выбранном и при минимальном шагах дискретизации дает величину погрешности дискретной аппроксимации.

В некоторых случаях оценку погрешности цифрового моделирования удобно производить путем сравнения результатов при выбранном шаге дискретизации с результатами аналитического решения задачи, если это решение нетрудно получить при некоторых упрощающих условиях. Этот вопрос будет рассмотрен в § 4.2.

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОТЕХНИКИ

4.1. Предварительные замечания

В данной главе приводятся примеры применения изложенных выше методов цифрового моделирования для решения сложных статистических задач радиотехники. На этих примерах показаны принципы реализации цифровых моделей на вычислительной машине для решения задач в целом, показаны преимущества и недостатки метода цифрового моделирования по сравнению с другими методами исследований. Кроме этого, даны результаты решения задач, представляющих интерес для специалистов. Прежде чем переходить к изложению конкретных примеров, целесообразно рассмотреть некоторые общие вопросы цифрового моделирования радиосистем.

Данные выше алгоритмы цифрового моделирования радиосигналов, помех, различных классов случайных процессов и процессов преобразования сигналов и помех при прохождении через линейные и нелинейные системы являются основными. Они отражают в удобной для реализации на ЦВМ форме поведение целого ряда наиболее распространенных объектов моделирования. Однако эти алгоритмы непосредственно позволяют получить описание поведения лишь отдельных элементов радиосистем или их параметров. Алгоритм функционирования всей заданной системы получается обычно путем комбинации основных алгоритмов.

Наиболее важным требованием к основным алгоритмам при их разработке было требование минимальных вычислительных затрат. Это же требование остается и при составлении комплексных алгоритмов для моделирования сложных систем в целом. Для сокращения вычислительных затрат при решении всей задачи требуется не только выбирать в качестве основных экономичные

моделирующие алгоритмы, но еще и эффективно их использовать.

Вычислительные затраты при реализации на ЦВМ модели некоторой системы, процессы в которой протекают во времени, удобно характеризовать масштабом времени M_t , равным отношению времени t_M , необходимого для воспроизведения на ЦВМ процессов в системе, к реальному времени протекания этих процессов, т. е.

$$M_t = t_M / t.$$

Хотя при моделировании на цифровых вычислительных машинах, вообще говоря, не существует такого однозначного понятия масштаба времени, как это имеют место при моделировании на аналоговых вычислительных машинах, однако нетрудно ввести некоторый вполне естественный масштаб времени и при цифровом моделировании. Действительно, воспроизведение на ЦВМ процессов, протекающих в моделируемой системе, осуществляется путем расчета по определенным алгоритмам значений, принимаемых этими процессами в дискретные моменты времени $t_1, t_2 > t_1, t_3 > t_2, \dots, t_n > t_{n-1}, \dots$. Чаще всего моменты фиксации процессов берутся с постоянным шагом Δt , т. е. $t_n = n\Delta t$. Время Δt_M , необходимое для завершения на ЦВМ всех расчетов на каждом шаге, обычно примерно одинаковое (при переменном времени расчета можно взять среднюю величину времени на один шаг). Поскольку после завершения расчетов на данном шаге сразу же производится расчет на следующем шаге, то, очевидно, масштаб времени при цифровом моделировании равен

$$M_t = \Delta t_M / \Delta t.$$

Если F_M — быстродействие машины, равное количеству элементарных операций в секунду (иногда эта величина обозначается как частота, например, в килогерцах или мегагерцах), а N_Δ — количество элементарных операций, затрачиваемых при расчете на одном шаге, то $\Delta t_M = N_\Delta / F_M$ и, следовательно,

$$M_t = \frac{N_\Delta}{\Delta t F_M} = N_\Delta \frac{2f_c}{F_M}, \quad (4.1)$$

где $f_c = \frac{1}{2\Delta t}$ — частота дискретизации процессов. Общее время, затрачиваемое на реализацию цифровой модели, равно

$$T_m = M_t T = N_\Delta \frac{2f_c}{F_m} T,$$

где T — реальный временной интервал наблюдения процессов в системе.

Чем меньше величина M_t , тем меньше вычислительные затраты. При $M_t = 1$ цифровое моделирование осуществляется в реальном масштабе времени, а при $M_t > 1$ и $M_t < 1$ — в замедленном и ускоренном масштабах времени соответственно. Поскольку минимальное значение N_Δ равно единице, а удвоенная частота дискретизации процессов в соответствии с теоремой Котельникова выбирается порядка ширины спектра процессов, то в реальном масштабе времени могут быть смоделированы лишь те радиосистемы или их отдельные элементы, у которых процессы, подлежащие воспроизведению, занимают полосу частот Δf , не превышающую быстродействие ЦВМ F_m . Большинство современных универсальных ЦВМ имеют быстродействие десятки и реже сотни килогерц, поэтому в настоящий период в реальном или же ускоренном масштабе времени могут быть смоделированы сравнительно низкочастотные радиосистемы, такие, как системы передачи речевых сигналов, следящие системы радиолокационных станций и др. Типичными примерами радиосистем, которые невозможно в настоящее время смоделировать на ЦВМ в реальном масштабе времени, являются системы внутриимпульсной обработки сложных радиолокационных сигналов с шириной спектра десятки и сотни мегагерц.

Согласно формуле (4.1) для уменьшения масштаба времени нужно при заданном быстродействии ЦВМ стремиться к уменьшению количества операций на каждом шаге и увеличению шага моделирования, при сохранении, конечно, допустимой точности моделирования. Различные способы сокращения вычислительных затрат при разработке основных моделирующих алгоритмов рассмотрены выше.

Имеются определенные возможности экономии в вычислениях и при составлении комплексных алгоритмов для моделирования систем в целом. Эти возможности

сводятся в основном к следующему. При цифровом моделировании радиосистем, в которых протекают процессы, лежащие в различных участках частотного диапазона, целесообразно использовать различный шаг дискретизации для соответствующих диапазонов частот. Например, при цифровом моделировании радиолокационного импульсного автодальномера процессы внутриимпульсной обработки сигнала (процессы в приемнике и дискриминаторе) целесообразно воспроизводить с шагом, выбранным исходя из полосы пропускания приемника и ширины спектра сигнала, а процессы слежения — с естественным шагом, равным периоду повторения зондирующих импульсов. Такое положение является характерным при моделировании импульсных радиосистем, относящихся к классу дискретно-непрерывных систем (дискретных при наблюдении от периода к периоду и непрерывных при наблюдении внутри импульсов). Шаги дискретизации могут отличаться при этом на несколько порядков. Шагом моделирования следует считать здесь наибольший шаг, который является основным в том смысле, что расчеты процессов с мелкими шагами (подробное воспроизведение) служат обычно для обеспечения расчетов с наиболее крупным шагом. Необходимый интервал наблюдения процессов в системе при подробном воспроизведении обычно меньше, а в ряде случаев гораздо меньше основного шага дискретизации; например, при моделировании стробируемого приемника импульсных сигналов подробное воспроизведение процессов необходимо только в пределах строба, длительность которого часто во много раз меньше периода повторения. Последнее дает возможность исключить из рассмотрения межпериодные промежутки при моделировании импульсных радиосистем.

Заметное сокращение вычислительных затрат дает также экономичная организация расчетов при цифровом моделировании по методу Монте—Карло, который требует многократного воспроизведения процессов, использование эффекта нормализации случайных величин и другие приемы. Все указанные приемы сокращенного моделирования радиосистем в целом продемонстрированы на приведенных ниже примерах.

Метод цифрового моделирования используется в этих примерах для *анализа радиосистем*. Полученные модели

в известной мере могут быть использованы и для синтеза радиосистем путем перебора различных вариантов с целью выбора наилучшего. Синтез радиосистем с помощью ЦВМ является очень важным направлением научных исследований, но в этой книге какие-либо специальные методы синтеза радиосистем с помощью ЦВМ не рассматриваются.

4.2. Исследование воздействия колебаний с шумовой модуляцией на радиоприемные устройства

1. Постановка задачи

Рассматриваемая ниже задача в общем виде формулируется следующим образом. Приемник, упрощенная функциональная схема которого состоит из линейного высокочастотного фильтра (радиофильтра), детектора и видеофильтра (рис. 4.1,а), находится под воздействием колебаний, модулированных случайным процессом по амплитуде и частоте. Требуется определить интенсивность, т. е. дисперсию (мощность) или среднеквадратическое значение и законы распределения флуктуаций на выходе приемника в зависимости от глубины амплитудной модуляции и девиации частоты входного колебания, ширины спектра модулирующего шума и величины расстройки входного воздействия по отношению к резонансной частоте приемника.

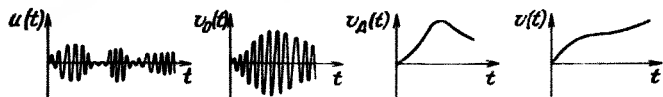
При решении задачи были сделаны следующие допущения.

1. Амплитудная и частотная модуляция входного колебания осуществляется одними и теми же реализациями видеочастотного стационарного нормального центрированного шума $\xi(t)$ с экспоненциальной корреляционной функцией $R(\tau) = e^{-\omega_n |\tau|}$, где $\omega_n = 2\pi\Delta F_m$ — ширина энергетического спектра шума на уровне 0,5. Характеристики модуляторов полагались линейными. Таким образом рассматривалось входное колебание вида

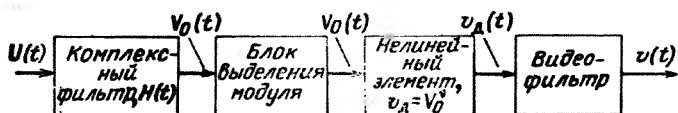
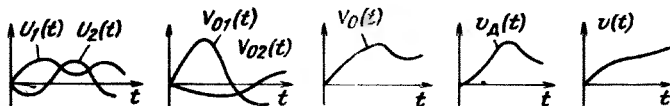
$$u(t) = \operatorname{Re} U(t) e^{j\omega_0 t}, \quad (4.2)$$

$$U(t) = U_0 [1 + m_a \xi(t)] e^{j \left[\sigma_\omega \int_0^t \xi(\tau) d\tau + \delta\omega t \right]},$$

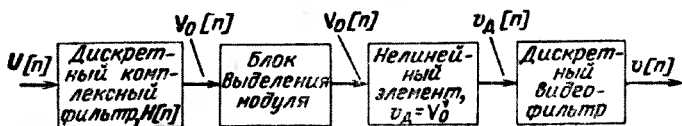
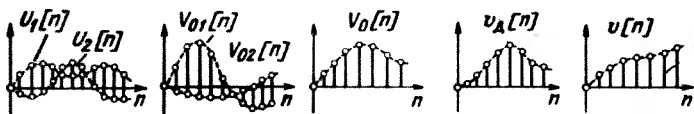
где U_0 — амплитуда колебания в режиме покоя; m_a — коэффициент амплитудной модуляции, равный отношению среднеквадратического значения флюктуаций амплитуды к среднему значению амплитуды U_0 ; $\sigma_\omega = 2\pi\sigma_f$ — среднеквадратическое значение девиации частоты; $\delta\omega = 2\pi\delta f$ — расстройка несущей частоты входного



а)



б)



в)

Рис. 4.1.

колебания относительно резонансной частоты приемника.

2. Амплитудно-частотная характеристика радиофильтра приемника является комплексно-сопряженной со спектром импульсного сигнала, представляющего собой либо обычный радиоимпульс с гауссовой огибающей, либо прямоугольный радиоимпульс с линейной внутриимпульсной частотной модуляцией, т. е. радиофильтр приемника является оптимальным фильтром (ОФ). В первом случае приемник назван оптимальным АМ приемником, а во втором случае — оптимальным ЧМ приемником. Импульсные переходные характеристики оптимальных фильтров приемников приняты соответственно равными

$$h_1(t) = \operatorname{Re} H_1(t) e^{j\omega_0 t}, \quad h_2(t) = \operatorname{Re} H_2(t) e^{j\omega_0 t},$$

где

$$H_1(t) = k_1 e^{-18(t/T-1/2)^2}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3)$$

— огибающая импульсной переходной характеристики ОФ АМ приемника;

$$H_2(t) = k_2 e^{j\pi K_{\text{УК}}(t^2/T^2 - t/T)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.4)$$

— комплексная огибающая импульсной переходной характеристики ОФ ЧМ приемника; k_1, k_2 — некоторые постоянные коэффициенты; T — длительность импульсной переходной характеристики (для АМ приемника на уровне $e^{-4,5} = 0,01$); $K_{\text{УК}} = 2\Delta f_{\text{д}} T$ — коэффициент укорочения импульса с линейной ЧМ при оптимальной фильтрации в ЧМ приемнике; $2\Delta f_{\text{д}}$ — двухсторонняя девиация частоты сигнала при линейной ЧМ.

3. Детектор приемника является либо линейным, либо квадратичным детектором огибающей, выделяющим без искажений огибающую или квадрат огибающей колебания на его входе.

4. Видеофильтр представляет собой двойную RC-цепь с передаточной функцией

$$K_{\Phi}(p) = \frac{1}{(1 + p\tau_{\Phi})^2}, \quad (4.5)$$

где τ_{Φ} — постоянная времени RC-цепи.

Такая задача встречается во многих отраслях радиотехники и частично уже рассматривалась в ряде работ

[61, 74, 75]. Полное решение этой задачи аналитическими методами, в особенности для случаев, когда берутся произвольные значения ширины спектра модулирующего шума и рассматриваются флюктуации на выходе ЧМ приемника, связано со значительными математическими трудностями, причем наибольшие трудности встречаются при нахождении законов распределения флюктуаций на выходе приемника. Лишь в некоторых предельных случаях задачу удастся довести до конца аналитически [61, 74, 75]. Экспериментальное исследование задачи, хотя в принципе вполне возможно, однако требует больших затрат времени и средств. Применение же цифрового моделирования в сочетании с методом Монте-Карло позволяет довольно просто решить эту задачу.

2. Цифровая модель приемника

Сущность метода Монте-Карло, как известно [10], состоит в построении с помощью средств вычислительной техники случайного процесса с параметрами, равными искомым величинам решаемой задачи, и в вычислении статистических характеристик этого процесса, приближенно равных искомым параметрам.

В рассматриваемой задаче интересующий нас случайный процесс представляет собой флюктуации на выходе приемника, находящегося под воздействием колебаний с шумовой модуляцией. Для формирования этих флюктуаций на ЦВМ построим цифровую модель приемника, используя методы моделирования, описанные в первых трех главах. Представим приемник в виде эквивалентной функциональной схемы (рис. 4.1,б), заменив радиофильтр комплексным фильтром (§ 3.4), а детектор — последовательным соединением блока выделения модуля и нелинейного безынерционного элемента с характеристикой нелинейности $f(x) = x^v$, где $v = 1, 2$. Для получения цифровой модели приемника непрерывные фильтры заменим соответствующими дискретными фильтрами (рис. 4.1,в), а затем, начиная с выхода приемника, опишем каждый блок соответствующим дискретным алгоритмом функционирования, используя при этом обозначения, показанные на рис. 4.1. Поскольку видеофильтр является линейной системой с дробно-рациональной передаточной функцией второго порядка [формула (4.5)],

для моделирования его воспользуемся рекуррентным алгоритмом, что в данном случае будет наиболее экономичной дискретной аппроксимацией (см. § 3.3). Тогда дискретный процесс $v[n]$, изображающий непрерывный процесс $v(t)$ на выходе приемника в точках $t_n = n\Delta t$, где Δt — шаг дискретизации видеофильтра, выразится в виде

$$v[n] = a_0 v_{\text{д}}[n] + a_1 v_{\text{д}}[n-1] + a_2 v_{\text{д}}[n-2] - b_1 v[n-1] - b_2 v[n-2], \quad (4.6)$$

где $v_{\text{д}}[n]$ — дискретные значения флюктуаций на выходе детектора; $a_k, k=0, 1, 2, b_k=1, 2$, — постоянные коэффициенты, определяемые при заданной передаточной функции видеофильтра шагом дискретизации и методом дискретной аппроксимации.

Для получения конкретных значений коэффициентов a_k и b_k воспользуемся методом Рагаззини-Бергена (метод дискретной аппроксимации повышенной точности, основанный на линейной интерполяции входного сигнала). Согласно этому методу, учитывая, что передаточная функция видеофильтра имеет только один полюс $p_1 = -1/\tau_{\Phi}$ кратности $r_1=2$, используя (3.45), (3.46), легко найдем

$$a_0 = 1 + \rho_{\Phi} \frac{2(1 - \rho_{\Phi})}{\Delta t_{\Phi}}; \quad a_1 = \frac{2(1 - \rho_{\Phi}^2)}{\Delta t_{\Phi}} - 4\rho_{\Phi},$$

$$a_2 = \rho_{\Phi} + \rho_{\Phi}^2 \frac{2\rho_{\Phi}(1 - \rho_{\Phi})}{\Delta t_{\Phi}}; \quad b_1 = -2\rho_{\Phi},$$

$$b_2 = 1; \quad \Delta t_{\Phi} = \Delta t / \tau_{\Phi}; \quad \rho_{\Phi} = e^{-\Delta t_{\Phi}}.$$

Далее, очевидно,

$$v_{\text{д}}[n] = V^v[n], \quad v = 1, 2; \quad V[n] = |V[n]|.$$

Комплексный фильтр, эквивалентный ОФ приемника, не является в данном случае системой с рациональной передаточной функцией. Поэтому алгоритм комплексной фильтрации запишем в виде комплексной свертки [формула (3.90)], основанной на применении к интегралу

Дюамеля для огибающих методов численного интегрирования (§ 3.4, п. 2). Тогда

$$V[n] = \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=0}^N c_0[k] H[k] U[n-k] = \sum_{k=0}^N a[k] U[n-k], \quad (4.7)$$

где

$$a[k] = \frac{\Delta t}{2} c_0[k] H[k];$$

$c_0[k]$ — коэффициенты, определяемые методом численного интегрирования; $H[k]$ — дискретные значения импульсной переходной характеристики комплексного фильтра; $N = T/\Delta t$; T — длительность импульсной переходной характеристики комплексного фильтра.

В более общем случае, когда шаг дискретизации радиофильтра $\Delta t'$ не равен основному шагу дискретизации Δt , а в l раз меньше его, алгоритм (4.7) записывается в виде

$$V[n] = \sum_{k=0}^{N'} a'[k] U'[nl - k], \quad N' = Nl. \quad (4.8)$$

Здесь и в дальнейшем штрихом помечены дискретные функции, порождаемые непрерывными при шаге дискретизации $\Delta t'$.

Положим, что дискретная аппроксимация ОФ производится с использованием формулы прямоугольников, тогда $c'[k] = 1$, $k = 1, N' - 1$; $c'[N'] = 0$. Конкретные численные значения комплексной весовой функции $H'[k]$ найдем из выражений (4.3) и (4.4) для комплексной огибающей $H(t)$ импульсной переходной характеристики ОФ:

$$H'_1[k] = k_1 e^{-18(k/N'-1/2)^2}, \quad H'_2[k] = k_2 e^{j\pi K_{\text{УК}} [k^2/(N')^2 - k/N']}$$

Окончательно весовые множители $a'[k]$ в формуле (4.8) равны

$$a'_1[k] = \frac{k_1 \Delta t}{2} e^{-18(k/N'-1/2)^2}, \quad (4.9)$$

$$a'_2[k] = \frac{k_2 \Delta t}{2} e^{j\pi K_{\text{УК}} [k^2/(N')^2 - k/N']} \quad (4.10)$$

Дискретная комплексная огибающая входного колебания в соответствии с выражением (4.2) запишется в виде

$$U' [n] = U_0 (1 + m_a \xi' [n]) e^{j(\theta' [n] + \bar{\omega}_* n)}, \quad (4.11)$$

где $\xi' [n]$ и $\theta' [n]$ — дискретные случайные процессы, порожденные непрерывными случайными процессами $\xi(t)$ и $\theta(t) = \int_0^t \xi(\tau) d\tau$.

Для формирования на ЦВМ дискретных реализаций случайного процесса $\xi(t)$ воспользуемся готовым алгоритмом (№ 1) из табл. 2.2:

$$\xi' [n] = \sqrt{1 - \rho^2} x [n] + \rho \xi' [n - 1], \quad (4.12)$$

где $\rho = e^{-2\pi\Delta F_m \Delta t} = e^{-2\pi\Delta F_m^*}$; $x [n]$ — последовательность независимых нормальных случайных чисел с параметрами (0, 1).

Случайный процесс $\theta(t)$ является здесь нормальным нестационарным процессом со стационарными приращениями. Производная этого процесса равна $\sigma_\omega \xi(t)$. Алгоритм для формирования реализаций такого процесса был получен в примере 1 § 2.9 и имеет вид

$$\begin{aligned} \theta' [n] = & a'_0 x [n] + a'_1 x [n - 1] + (1 + \rho) \theta' [n - 1] - \\ & - \rho \theta' [n - 2], \end{aligned} \quad (4.13)$$

где коэффициенты a'_0 и a'_1 определяются формулами (2.131), (2.130), (2.126), (2.128) при $\sigma = \sigma_\omega$, $\Delta t = \Delta t'$, $\bar{\omega}_* = \omega_* \Delta t'$.

Надо отметить, что, поскольку случайный процесс $\theta(t)$ является преобразованием от случайного процесса $\xi(t)$, то случайные числа $x [n]$ в алгоритмах (4.12) и (4.13) должны быть одними и теми же случайными числами.

Алгоритм (4.13) не имеет методической погрешности. Приближенный алгоритм формирования процесса $\theta' [n]$ можно легко получить, заменив интеграл суммой. Тогда

$$\theta' [n] = \bar{\sigma}_\omega \xi' [n] + \theta' [n - 1], \quad \bar{\sigma}_\omega = \sigma_\omega \Delta t'. \quad (4.14)$$

На этом составление цифровой модели приемника, по существу, заканчивается. Получена последовательность отдельных алгоритмов [формулы (4.6) — (4.14)], позволяющих преобразовывать на ЦВМ дискретные реализации $\xi'[n]$ модулирующего процесса $\xi(t)$ в дискретные реализации $v[n]$ флюктуаций $v(t)$ на выходе приемника. Алгоритмы являются рекуррентными, отличаются простотой и легко реализуются на ЦВМ.

Основными параметрами рассматриваемой модели являются величины m_a , σ_ω , $\Delta F_{ш}$, $\delta\omega$, T , $K_{ук}$, τ_ϕ . От выбора их значений зависит результат решения задачи. Параметры Δt , $\Delta t'$, N' , ρ , k_1 , k_2 , U_0 являются вспомогательными; они определяют погрешность дискретизации и масштаб процессов. Для решения задачи в общем виде удобнее пользоваться безразмерными и несколько отличными от указанных параметрами. Для получения таких параметров выразим шаг дискретизации $\Delta t'$ через частоту дискретизации f'_c в виде $\Delta t' = 1/2f'_c$, а частоту дискретизации свяжем с полосой пропускания $2\Delta f$ радиофильтра приемника, положив $f'_c = \gamma\Delta f$, где γ — некоторый коэффициент, определяющий погрешность дискретизации. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_f &= \sigma_f \Delta t' = \beta/2\gamma, & \bar{\Delta F}_{ш} &= \Delta F_{ш} \Delta t' = \beta/2\gamma m_j = \alpha/\gamma; \\ \bar{\delta f} &= \delta f \Delta t' = \delta/2\gamma; & \bar{\Delta t}_\phi &= \Delta t'/\tau_\phi = l/\gamma k_\phi, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $\beta = \sigma_f/\Delta f$ — отношение среднеквадратического значения девиации частоты входного воздействия к полуполосе пропускания радиофильтра; $\alpha = \Delta F_{ш}/2\Delta f$ — отношение ширины спектра модулирующего шума к полуполосе радиофильтра; $m_j = \sigma_f/\Delta F_{ш}$ — индекс частотной модуляции входного колебания; $\delta = \delta f/\Delta f$ — относительная расстройка; $k_\phi = 1/2\Delta f \tau_\phi = \Delta F_\phi/2\Delta f$ — отношение полосы пропускания видеофильтра (на уровне 0,5) к полосе пропускания радиофильтра.

Выберем теперь вполне определенный масштаб моделируемых процессов. Положим, не нарушая общности, амплитуду U_0 и коэффициент передачи приемника $K_{п}$ равными единице. Поскольку коэффициенты передачи детектора и видеофильтра уже выбраны единичными, для обеспечения $K_{п} = 1$ надо приравнять единице коэффициент передачи оптимального фильтра k_0 . Величина k_0 определяется значениями коэффициентов k_1 и k_2 в формулах (4.3) и (4.4).

Для АМ приемника частотная характеристика как преобразование Фурье от импульсной переходной характеристики $h_1(t)$, если пренебречь погрешностью отсечки гауссовой огибающей функции $h_1(t)$ (в данном случае на уровне 0,01), имеет вид

$$K_1(j\omega) = K_0(j\omega - j\omega_0) e^{-j_1(\omega - \omega_0) t_0} + K_0(j\omega + j\omega_0) e^{-j_1(\omega + \omega_0) t_0},$$

где

$$K_0(j\omega) = k_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Delta\omega} e^{-\omega^2/2\Delta\omega^2};$$

$k_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \Delta\omega} k_1$ — коэффициент передачи радиопередатчика на резонанс-

ной частоте; $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ — полуширина гауссовой амплитудно-частотной характеристики радиопередатчика на уровне $1/\sqrt{e} = 0,61$ (эта величина связана с длительностью импульсной переходной характеристики радиопередатчика на уровне $e^{-4,5} = 0,01$ соотношением $\Delta\omega = 6/T$). Чтобы

получить $k_0 = 1$, нужно выбрать $k_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{6}{T}$. При этом формула

(4.9) для расчета весовых множителей $a'_1[k]$ примет вид

$$a'_1[k] = 3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{N'} \exp\left[-18\left(\frac{k}{N'} - \frac{1}{2}\right)^2\right]. \quad (4.16)$$

Амплитудно-частотная характеристика ОФ ЧМ приемника при $K_{УЧ} \gg 1$, как известно [53], почти прямоугольная шириной $2\Delta f = 2\Delta f_{д.}$ Для перехода от коэффициента k_2 к среднему коэффициенту передачи ОФ в пределах полосы пропускания поступим следующим образом. Найдем площадь под кривой $K_2^2(\omega) = |K_2(j\omega)|^2$, т.е. величину

$$s_2 = \int_{-\infty}^{\infty} K_2^2(\omega) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} K_2^2(f) df,$$

где $K_2(j\omega)$ — частотная характеристика ОФ ЧМ приемника.

Согласно равенству Парсеваля величину s_2 можно представить в виде

$$\begin{aligned} s_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2^2(t) dt = \int_0^T [R_2 H_2(t) e^{j\omega_0 t}]^2 dt = \\ &= \int_0^T H_2^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \varphi_{h_2}(t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^T H_2^2(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T H_2^2(t) \cos^2[2\omega_0 t + 2\varphi_{h_2}(t)] dt, \end{aligned}$$

где $H_2(t)$ и $\varphi_{h_2}(t)$ огибающая и фаза импульсной переходной характеристики ОФ соответственно.

Поскольку предполагается, что $H_2(t)$ медленно изменяется по сравнению с $\cos\{\omega_0 t + \varphi_{H_2}(t)\}$, то интегралом от быстроосциллирующей функции во втором слагаемом последней формулы можно пренебречь. Тогда

$$s_2 = \frac{1}{2} \int_0^T H_2^2(t) dt = \frac{1}{2} k_2^2 T. \quad (4.17)$$

Заменяя функцию $K^2(f)$ двумя эквивалентными по площади прямоугольниками шириной $2\Delta f = 2\Delta f_{\text{д}}$ (в области положительных и отрицательных частот), согласно (4.17) получим выражение для высоты этих прямоугольников, которая равна некоторому усредненному коэффициенту передачи ОФ, в виде

$$k_0^2 = \frac{s_2}{4\Delta f_{\text{д}}} = k_2^2 \frac{T}{8\Delta f_{\text{д}}}.$$

Отсюда для обеспечения $k_0=1$ нужно выбрать k_2 из условия

$$k_2 = \sqrt{8\Delta f_{\text{д}}/T}.$$

Тогда формула (4.10) для расчета комплексных весовых множителей $a'_2[k]$ примет вид

$$a'_2[k] = \frac{\sqrt{K_{\text{УК}}}}{N'_2} e^{j\pi K_{\text{УК}} \left[\frac{k^2}{(N'_2)^2} - \frac{k}{N'_2} \right]}.$$

Учитывая, что полоса пропускания радиоприемника АМ и ЧМ приемников равна соответственно $2\Delta f_1 = 6/\pi T$ и $2\Delta f_2 = 2\Delta f_{\text{д}}$, параметр N' в формулах (4.9) и (4.10) можно выразить в виде

$$N'_1 = 6\gamma/\pi, \quad N'_2 = \gamma K_{\text{УК}}.$$

Теперь, после всех нормировок, окончательный алгоритм цифровой модели приемника можно записать в следующем формульном виде:

$$v[n] = a_0 |V[n]|^p + a_1 |V[n-1]|^p + a_2 |V[n-2]|^p - b_1 v[n-1] - b_2 v[n-2];$$

$$V[n] = \sum_{k=0}^{N'_1-1} a'[k] (1 + m_n \xi'[nl-k]) \times \\ \times e^{j \left[\theta'[nl-k] + \frac{\pi}{T} (nl-k) \delta \right]};$$

$$\xi'[n] = \sqrt{1 - \rho^2} x[n] + \rho \xi'[n-1];$$

$$\theta'[n] = \frac{\pi}{\gamma} \beta \xi'[n] + \theta'[n-1].$$

Параметры $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, N'_{1,2}, a'_{1,2}[k], \rho_\Phi$ остаются неизменными при решении конкретного варианта задачи и вычисляются перед началом реализации модели по формулам, приведенным в данном параграфе, параметр ρ определяется по формуле

$$\rho = e^{-\pi\beta/m_f} = e^{-\pi\alpha/2\gamma}.$$

При этом параметры $\alpha, \beta, \gamma, m_a, m_f, l, k_\Phi$ задаются как исходные данные.

3. Организация расчетов на ЦВМ для вычисления статистических характеристик

Для получения интересующих нас статистических характеристик флюктуаций на выходе приемника кроме описанной выше цифровой модели приемника целесообразно запрограммировать и процесс статистической обработки результатов по методу Монте-Карло. В данном случае статистическая обработка состоит в накоплении первых нескольких степеней случайных чисел $v[n]$ для определения моментов распределения флюктуаций на выходе приемника, в частности для определения интенсивности флюктуаций, а также в построении гистограмм распределения случайных чисел $v[n]$ для оценки законов распределения флюктуаций на выходе приемника.

Возможность осуществлять моделирование и одновременно без особого труда производить необходимую обработку результатов является важным преимуществом использования для моделирования универсальных ЦВМ.

При моделировании эргодических систем, т. е. систем, процессы которых таковы, что усреднение их характеристик по времени равносильно усреднению по множеству (именно этот случай имеет место в рассматриваемой задаче), вычисление статических характеристик процессов целесообразно производить *параллельно*, чтобы избежать накопления больших массивов чисел, подлежащих статистической обработке. В частности, в рассматриваемой задаче нет необходимости запоминать последовательность $v[n]$, чтобы потом найти ее статистические характеристики: среднее, дисперсию, корреляционную функцию и т. д. Можно, получив очередное значение $v[n]$, сразу же подвергнуть его соответствующей обработке и в дальнейшем не использовать его или исполь-

зовать только на ближайших нескольких шагах модели. Процесс параллельного вычисления моментов распределения и законов распределения последовательности $v[n]$ очевиден: каждое очередное значение $v[n]$ возводится в соответствующую степень и накапливается в некоторой ячейке, где хранится предыдущее значение степени числа $v[n]$ (вычисление моментов), и каждое очередное значение $v[n]$ анализируется с целью определения разряда гистограммы, в который оно попадает, а затем в ячейку, соответствующую полученному разряду, добавляется единица (построение законов распределения), после чего производится переход к расчетам на следующем шаге по алгоритму модели. Такой способ общеизвестен и часто используется при моделировании.

Менее известным является метод параллельного (рекуррентного) вычисления корреляционной функции. Пусть требуется вычислить корреляционную функцию $R_v[m]$ последовательности $v[n]$ для $m=0, \overline{N_R}$, где N_R — число дискретных значений корреляционной функции. Обычная формула вычисления $R_v[m]$ имеет вид

$$R_v[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^N v[n] v[n-m], \quad (4.18)$$

где N — количество точек $v[n]$ (длина реализации дискретного процесса $v[n]$).

По этой формуле путем суммирования по n произведений $v[n]v[n-m]$ для $n=1, \overline{N}$ при фиксированном m осуществляется вычисление корреляционной функции, когда задана вся последовательность $v[n]$. Для рекуррентного вычисления $R_v[m]$ формулу (4.18) нужно использовать несколько иначе: получив очередное значение $v[n]$, нужно при данном n вычислить произведения $v[n]v[n-m]$ для $m=0, \overline{N_R}$, а затем присуммировать полученные произведения к содержимому ячеек, хранящих накопленные на предыдущих шагах суммы вида

$$S_v[0, n-1] = \sum_{k=0}^{n-1} v^2[k], \quad S_v[1, n-1] = \sum_{k=0}^{n-1} v[k] v[k-1], \dots, \quad (4.19)$$

$$S_v[N_R-1, n-1] = \sum_{k=0}^{n-1} v[k] v[k-(N_R-1)].$$

Несуществующие значения чисел $v[k]$ в формулах (4.19), например $v[0]$ при вычислении $S[1, 1]$, приравниваются нулю. Окончательно корреляционная функция $R_v[m]$ получается как

$$R_v[m] = S_v[m, M]/(N-m).$$

При вычислении корреляционной функции по данному алгоритму требуется помнить N_R предыдущих значений последовательности $v[n]$. Число N_R обычно гораздо меньше N , что дает большую экономию ячеек памяти машины при использовании рекуррентного алгоритма вычисления корреляционной функции.

Для параллельного построения гистограммы распределения желательнее заранее ориентировочно знать диапазон наиболее вероятных значений случайных чисел, чтобы выбрать приемлемый размер и количество разрядов гистограммы. В рассматриваемой задаче примерный диапазон значений флюктуаций $v(t)$ нетрудно определить. Действительно, поскольку в алгоритме принято $U_0=1$ и $K_n=1$, то максимальное значение флюктуаций на выходе при отсутствии амплитудной модуляции на входе ($m_a=0$) будет близко к единице. Минимальное значение, очевидно, равно нулю. При наличии амплитудной модуляции максимальный размах флюктуаций на выходе увеличится примерно до $1+3m_a$, так как амплитуда колебания на входе, флюктуирующая по нормальному закону с параметрами $(1, m_a)$, с вероятностью, близкой к единице, заключена в интервале от 0 до $1+3m_a$.

4. Некоторые аналитические оценки для контроля достоверности и точности результатов моделирования

Одним из важнейших вопросов при решении статистических задач методом цифрового моделирования является вопрос о выборе критерия оценки достоверности и точности получаемых результатов. При решении рассматриваемой задачи точность результатов можно проконтролировать методом сравнения с аналитическим решением. Сущность метода состоит в следующем.

Выбирается такой вариант входных параметров алгоритма, при которых исследуемая задача допускает достаточно простое аналитическое решение. Затем про-

изводится сравнение результатов аналитического решения с результатами решения на ЦВМ при тех же параметрах. В качестве меры погрешности выбирается величина расхождения этих результатов.

Аналитическое решение исследуемой здесь задачи легко получить квазистационарным методом [24] для случая, когда спектр модулирующего процесса значительно уже полосы пропускания приемника ($\alpha \ll 1$), коэффициент амплитудной модуляции $m_a = 0$ и видеофильтр не вносит искажений, т. е. $v(t) \equiv v_d(t)$. Действительно, при $\alpha \ll 1$ качание частоты входного воздействия производится достаточно медленно и поэтому можно полагать, что переходные процессы в радиофильтре приемника, связанные с изменением частоты, не оказывают влияния на параметры огибающей выходного колебания. Последнее означает, что огибающую на выходе радиофильтра можно находить как и в случае стационарного (установившегося) режима, пользуясь его статической амплитудно-частотной характеристикой, т. е. по формуле

$$V(t) = K_0 [\Omega(t)] = K_0 [\sigma_\omega \xi(t) + \delta\omega] = \exp[-(\sigma_\omega \xi(t) + \delta\omega)^2 / 2\Delta\omega^2].$$

Отсюда выходное напряжение $v(t)$, равное напряжению $v_d(t)$ на выходе детектора, запишется в виде

$$v(t) = V^v(t) = K_0^v [\Omega(t)],$$

где $v=1$ в случае линейного и $v=2$ в случае квадратичного детектора.

Найдем плотность вероятностей флюктуаций $v(t)$. Случайная величина v представляет собой функцию от случайной величины Ω с гауссовым законом распределения:

$$w(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} e^{-\frac{(\Omega - \delta\omega)^2}{2\sigma_\omega^2}}.$$

Используя известные способы нахождения плотности вероятностей функции от случайного аргумента, получим

$$w(v) = \frac{1}{2(\pi v)^{1/2} \beta (-\ln v)^{1/2}} \times \left\{ e^{-\frac{[(-2 \ln v)^{1/2} + v^{1/2} \delta]^2}{2v\beta^2}} + e^{-\frac{[(-2 \ln v)^{1/2} - v^{1/2} \delta]^2}{2v\beta^2}} \right\}, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

В частности, при отсутствии расстройки ($\delta = 0$)

$$w(v) = \frac{1}{v^{1/2} \beta^2 (-\ln v)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(\pi v)^{1/2} \beta (-\ln v)^{1/2}}, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (4.20)$$

Начальные моменты распределения флуктуаций $v(t)$ в квазистационарном случае равны

$$M_{v^n} = M\{v^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} K^{v^n}(\Omega) \omega K_0(\Omega) d\Omega = \frac{\exp\left[-\frac{vn\delta^2}{2(1+vn\beta^2)}\right]}{(1+vn\beta^2)^{1/2}}. \quad (4.21)$$

Отсюда интенсивности флуктуаций (мощность переменной составляющей) на выходе АМ приемника с линейным и квадратичным детектором соответственно выражаются в виде

$$\sigma_1^2 = M_2 - M_1^2 = \frac{\exp[-\delta^2/(1+2\beta^2)]}{(1+2\beta^2)^{1/2}} - \frac{\exp[-\delta^2/(1+\beta^2)]}{1+\beta^2}. \quad (4.22)$$

$$\sigma_2^2 = M_4 - M_2^2 = \frac{\exp[-2\delta^2/(1+4\beta^2)]}{(1+4\beta^2)^{1/2}} - \frac{\exp[-2\delta^2/(1+2\beta^2)]}{1+2\beta^2}. \quad (4.23)$$

Интересно сравнивать интенсивность флуктуаций на выходе АМ приемника в квазистационарном случае при воздействии на входе колебаний с шумовой частотной модуляцией с интенсивностью флуктуаций при воздействии стационарного нормального случайного процесса, мощности и энергетические спектры которых совпадают. Назовем воздействия, удовлетворяющие этому условию, спектрально эквивалентными.

Форма энергетического спектра колебания, модулированного по частоте нормальными флуктуациями, зависит, вообще говоря, от формы спектра модулирующего процесса. Однако в случаях, когда индекс частотной модуляции $m_f \geq 1$, влияние формы энергетического спектра модулирующего шума практически незначительно и высокочастотный спектр частотно-модулированного колебания (исключая внеполосное излучение) хорошо аппроксимируется своей асимптотической кривой, полученной при $m_f \rightarrow \infty$, которая представляет собой тауссову кривую с вершиной в точке $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ [14]. При этом ширина спектра (на уровне $1/\sqrt{e}$) равна $2\delta\omega$. Для сравнения ограничимся случаем $m_f \geq 1$ и предположим, что энергетический спектр прямошумового воздействия совпадает с асимптотическим спектром частотно-модулированных колебаний и оба воздействия одинаковы по мощности. Дисперсии флуктуаций на выходе радиоприемника при спектрально эквивалентных воздействиях будут, очевидно, одинаковыми и равны величине $\sigma^2 = M_2/2$, где M_2 — среднее значение квадрата огибающей колебания на выходе радиоприемника, определяемое формулой (4.21) при $v=1$, $n=2$. Поскольку огибающая колебания на выходе радиоприемника при прямошумовом воздействии распределена по закону Релея с параметром σ , то интенсивность прямошумовых флуктуаций на выходе приемника с линейным и квадратичным детекторами, равная соответственно дисперсии релеевской амплитуды и дисперсии квадрата релеевской амплитуды, выражается в виде

$$\sigma_{01}^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) M_2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times$$

$$\times \frac{\exp[-\delta^2/(1+2\beta^2)]}{(1+2\beta^2)^{1/2}}, \quad (4.24)$$

$$\sigma_{02}^2 = 4\sigma^4 = M_2^2 = \frac{\exp[-2\delta^2/(1+2\beta^2)]}{1+2\beta^2}. \quad (4.25)$$

Рассмотрим теперь воздействие ЧМ шумового колебания на ЧМ приемник в квазистационарном случае.

При прямоугольной аппроксимации амплитудно-частотной характеристики радиоприемника напряжение на выходе ЧМ приемника с линейным (квадратичным) детектором в квазистационарном случае будет, очевидно, принимать только два значения: $v = v_{\text{л}} = k_{\text{л}} k_{\text{р}} A$ ($v = v_{\text{кв}} = k_{\text{кв}} (k_{\text{р}} A)^2$) при попадании частоты входного колебания в полосу пропускания приемника и $v = 0$ — в противном случае, где $k_{\text{р}}$, $k_{\text{л}}$, $k_{\text{кв}}$ — коэффициенты передачи радиоприемника, линейного детектора и квадратичного детектора соответственно, A — амплитуда входного колебания.

Поскольку принято $k_{\text{р}} = k_{\text{л}} = k_{\text{кв}} = A = 1$, $v_{\text{л}} = v_{\text{кв}} = 1$. Следовательно, в рассматриваемом случае функции плотности флюктуаций на выходе ЧМ приемника с линейным и квадратичным детекторами будут одинаковыми и равными

$$w(v) = (1 - P_{\omega}) \delta(v) + P_{\omega} \delta(v - 1), \quad (4.26)$$

где P_{ω} — вероятность того, что мгновенная частота входного колебания окажется в полосе приемника; $\delta(x)$ — дельта-функция.

При модуляции нормальным шумом величина P_{ω} , как легко видеть, выражается формулой

$$P_{\omega} = \Phi\left(\frac{\Delta\omega + \delta\omega}{\sigma_{\omega}}\right) - \Phi\left(\frac{\Delta\omega - \delta\omega}{\sigma_{\omega}}\right) = \Phi\left(\frac{1 + \delta}{\beta}\right) - \Phi\left(\frac{1 - \delta}{\beta}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Интенсивность флюктуаций, распределение которых подчинено закону (4.26), равна

$$\sigma_{1,2}^2 = M_2 - M_1^2 = \int_0^{\infty} v^2 w(v) dv - \left(\int_0^{\infty} v w(v) dv \right)^2 = P_{\omega} - P_{\omega}^2.$$

Поскольку $M_1 = P_{\omega}$, то отношение выходной мощности ЧМ шумовых флюктуаций в квазистационарном случае к выходной мощности спектрально эквивалентных прямошумовых флюктуаций при линейном и квадратичном детекторах соответственно равно

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{01}^2} = \frac{1 - P_{\omega}}{1 - \frac{\pi}{4}}, \quad \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{02}^2} = \frac{1 - P_{\omega}}{P_{\omega}}. \quad (4.27)$$

Полученные аналитические результаты позволяют осуществить контроль правильности решения задачи способом цифрового моделирования.

5. Выбор исходных данных и результаты цифрового моделирования

Составленный выше алгоритм цифровой модели приемника был запрограммирован и реализован на ЦВМ М-20. Ниже приводятся исходные данные, принятые при расчетах на ЦВМ, и результаты нахождения интенсивностей и законов распределения флюктуаций на выходе приемника в предположении, что видеофильтр не вносит искажений [$v(t) \equiv v_d(t)$] и что входное колебание модулировано только по частоте ($m_a = 0$).

Исследование проводилось путем просчета на ЦВМ и последующего анализа различных вариантов задачи. Варианты отличались значениями входных параметров α , β , γ , N' , l . Выходными результатами в каждом варианте были первые два момента распределения и гистограммы распределения флюктуаций на выходе приемника для линейного и квадратичного детекторов одновременно. АМ и ЧМ приемники исследовались отдельно.

Для получения необходимых числовых характеристик формировались дискретные реализации $v[n]$ выходного эффекта приемника длиной N_0 значений. Усреднение производилось шаг за шагом параллельно, как это описано в п. 2. Для повышения точности статистических оценок при данном N_0 шаг Δt выбирался равным постоянной времени радиофильтра с тем, чтобы дискреты $v[n]$ были почти некоррелированными. При этом $l = N'$. Параметр γ , характеризующий погрешность дискретизации, для АМ приемника выбирался равным 2π . При этом $N'_1 = T/\Delta t' = 12$, что обеспечивало достаточную точность для всех решаемых вариантов одновременно. Для ЧМ приемника этот параметр выбирался в зависимости от варианта решения из условия $\gamma = 3\beta$, но не меньше 2 и таким, чтобы N'_2 было целым числом. Таким образом, частота дискретизации оптимального фильтра ЧМ приемника выбиралась либо вдвое больше полосы пропускания фильтра (на уровне 0,5), либо вдвое больше ширины спектра ЧМ шумового колебания (на уровне $1/\sqrt{e}$), смотря по тому, что было более широкополосным: частотная характеристика приемника или спектр входного колебания. Расчеты для ЧМ приемника производились при $K_{\text{ук}} = 25$, так что $N'_{2\text{мин}} = 50$ и $N'_{2\text{макс}} = 225$ (при $\beta = 3$).

Величина N_0 для АМ приемника бралась равной 1000, а для ЧМ приемника, моделирование которого требовало большего количества машинного времени, в целях сокращения вычислительных затрат параметр N_0 принимался равным 400—500. При этом для просчета одного варианта на ЦВМ М-20 требовалось 3—5 мин в случае АМ приемника и около 20 мин в случае ЧМ приемника. Точность статистических оценок в первом и во втором случае соответственно составляла 5—10% и 10—15%.

Для оценки законов распределения флюктуаций в области малых вероятностей (порядка 10^{-3} — 10^{-4}) для ЧМ приемника объем статистики в некоторых вариантах увеличивался до $N_0=10\,000$, при этом на решение одного варианта затрачивалось около четырех часов машинного времени.

Проверка правильности цифровых моделей АМ и ЧМ приемников осуществлялась следующими путями.

Для АМ приемника были получены гистограммы распределения флюктуаций на выходе при отсутствии расстройки в условиях, близких к квазистационарным, т. е. при узком спектре модулирующего шума ($\alpha \ll 1$). Эти гистограммы вместе с другими гистограммами, построенными с использованием 1000 значений $v[n]$, представлены на рис. 4.12 (крайние справа). Плавной линией показаны аналитические кривые плотности вероятностей для квазистационарного случая, рассчитанные по формуле (4.20). Из рисунков видно хорошее совпадение законов распределения, вычисленных на ЦВМ, с аналитическими законами распределения.

Для ЧМ приемника были сняты амплитудно-частотные характеристики. Для этого в алгоритме параметр β приравнивался нулю, задавались различные значения параметра δ и вычислялось установившееся значение выходного сигнала $v[n]$. Физически это соответствовало пропуску через приемник гармонического колебания с фиксированной амплитудой с различными частотами $\omega_0 + \delta\omega$. Зависимость выходного напряжения $v[n]$ от δ давала амплитудно-частотную характеристику приемника.

На рис. 4.2 показаны амплитудно-частотные характеристики ЧМ приемника, вычисленные при коэффициенте укорочения 15 и 60. На этом же рисунке показаны ам-

плитудно-частотные характеристики прямоугольной формы, эквивалентные реальным в смысле равенства площадей под квадратами кривых.

На рис. 4.3 показана реакция ЧМ приемника на воздействие полезного сигнала, вычисленная путем замены

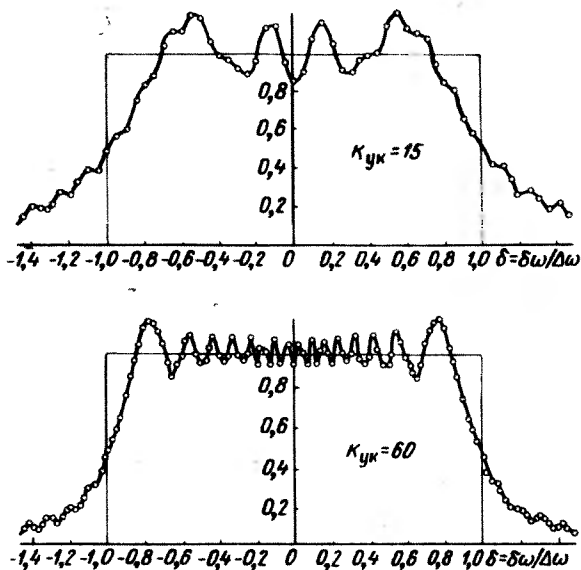


Рис. 4.2.

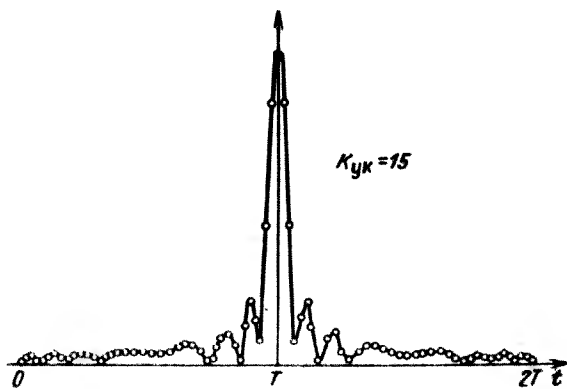


Рис. 4.3.

в алгоритме дискретной фазы ЧМ шумового колебания дискретной фазой полезного сигнала при $K_{\text{УК}}=15$.

Сравнение полученных результатов с известными [53] характеристиками оптимального ЧМ приемника убеждает в правильности цифровой модели.

Приведем теперь некоторые окончательные результаты цифрового моделирования.

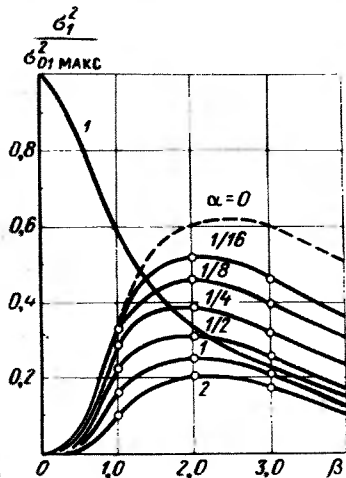


Рис. 4.4.

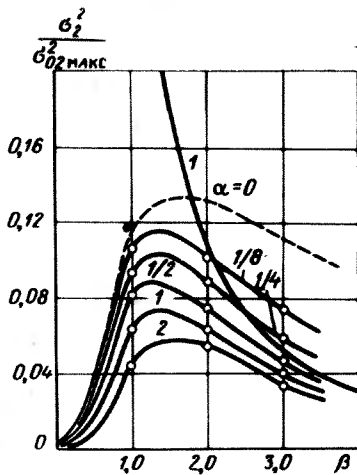


Рис. 4.5.

На рис. 4.4 представлена зависимость мощности флуктуаций на выходе АМ приемника с линейным детектором от относительной девиации частоты входного ЧМ колебания в отсутствие расстройки ($\delta=0$). Кривые получены при фиксированных значениях отношения ширины спектра модулирующего шума к полосе пропускания радиопередатчика ($\alpha=\text{const}$). Пунктиром показана зависимость для квазистационарного случая, полученная по формуле (4.22). Для сравнения приведена зависимость мощности флуктуаций при спектрально эквивалентном прямошумовом воздействии (кривая 1), рассчитанная по формуле (4.24). Кривые на рис. 4.4 нормированы по отношению к максимальному значению флуктуаций при прямошумовом воздействии, т. е. к величине $\sigma_{01 \text{ макс}}^2$, которая при принятых здесь условиях равна $(1-\pi/4)$ и наблюдается при $\delta=0$ и $\beta \rightarrow 0$.

Как было показано в п. 4, мощность σ_{01}^2 прямошумовых флюктуаций на выходе приемника может быть выражена через средний квадрат M_2 флюктуаций на выходе при воздействии ЧМ шумового колебания в квазистационарном случае по формуле (4.24). Этот факт позволил контролировать точность решения задачи путем подсчета среднего значения величины $v^2[n]$ и сравнения при $\alpha \ll 1$ величины $(1 - \pi/4)M\{v^2[n]\}$ с теоретическим значением σ_{01}^2 . Такое сравнение дало возможность убедиться, что погрешность статистических оценок параметров составляла несколько процентов.

Из рис. 4.4 видно, что мощность ЧМ шумовых флюктуаций на выходе АМ приемника с линейным детектором достигает максимума, когда отношение среднеквадратической девиации частоты к полосе приемника примерно равно двум. При увеличении ширины спектра модулирующего шума по отношению к полосе приемника (увеличении параметра α) мощность флюктуаций уменьшается, что объясняется инерционностью радиофильтра приемника.

При $\beta \geq 1,2$ и малых α мощность флюктуаций на выходе при ЧМ шумовом воздействии превышает мощность флюктуаций при спектрально эквивалентном прямошумовом воздействии, причем для малых α превышение может быть более чем вдвое.

Область на рис. 4.4, где кривые интенсивности ЧМ шумовых флюктуаций приближаются к кривой 1 для прямошумовых флюктуаций, соответствует условиям нормализации ЧМ шумовых колебаний при прохождении их через радиофильтр приемника.

Рис. 4.5 является аналогом рис. 4.4 для случая квадратичного детектора. Пунктирная кривая получена здесь по формулам (4.23) — (4.25) соответственно. Качественно картина остается прежней. Различие состоит в том, что максимум интенсивности флюктуаций смещается в сторону меньших значений β и наблюдается при $\beta = 1 \div 1,5$, а также в том, что превышение мощности ЧМ шумовых флюктуаций над мощностью прямошумовых флюктуаций наступает при больших значениях β .

На рис. 4.6 и 4.7 показаны зависимости мощности флюктуаций на выходе АМ приемника от расстройки несущей частоты входного колебания при $\beta = 1$ для линей-

ного и квадратичного детекторов соответственно. Все обозначения на этих рисунках такие же, как и на рис. 4.4 и 4.5. Из рисунков следует, что при относительной расстройке порядка единицы мощность ЧМ шумовых флюктуаций несколько выше, чем без расстройки. Это объясняется тем, что при некотором значении расстройки улучшаются условия преобразования частотной модуля-

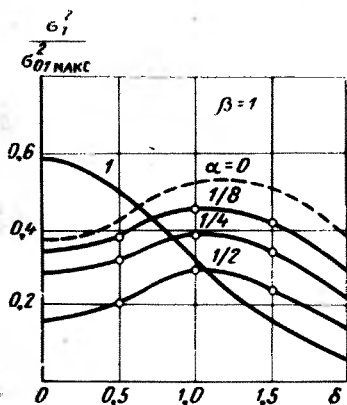


Рис. 4.6.

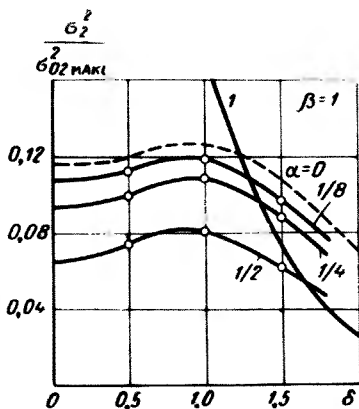


Рис. 4.7.

ции входного колебания в амплитудную модуляцию при прохождении его через радиофильтр. При прямошумовом воздействии такого эффекта не наблюдается (рис. 4.6 и 4.7, кривые 1).

Следует заметить, что результаты, полученные здесь для АМ приемника с квадратичным детектором, хорошо согласуются с соответствующими результатами, полученными в работах [74, 75].

На рис. 4.8 и 4.9 даны зависимости отношения мощности ЧМ шумовых флюктуаций к мощности спектрально эквивалентных прямошумовых флюктуаций на выходе линейного и квадратичного детекторов соответственно от параметра α при $\delta=0$ и различных значениях β . Из рисунков видно, что увеличение α приводит к уменьшению мощности флюктуаций на выходе приемника.

На рис. 4.10,а и 4.11 даны аналогичные кривые для ЧМ приемника в случае линейного и квадратичного детекторов соответственно в зависимости от $\alpha_0 = \alpha K_{\text{УР}}$ при

различных β . В отличие от АМ приемника здесь наблюдается в принципе другая картина, а именно: при определенном значении параметра α_0 имеет место максимум

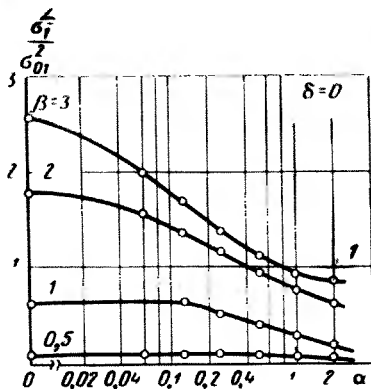


Рис. 4.8.

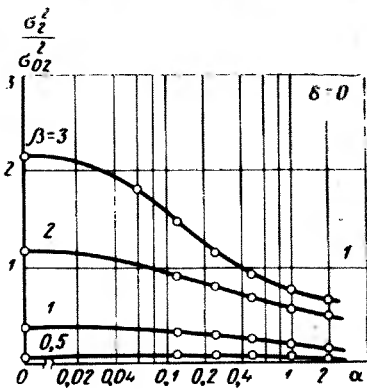


Рис. 4.9.

интенсивности ЧМ шумовых флюктуаций, который наиболее ярко выражен для приемника с квадратичным детектором. Наличие максимума обусловлено тем, что при некотором значении α_0 в оптимальном фильтре приемника создаются хорошие условия для превращения частот-

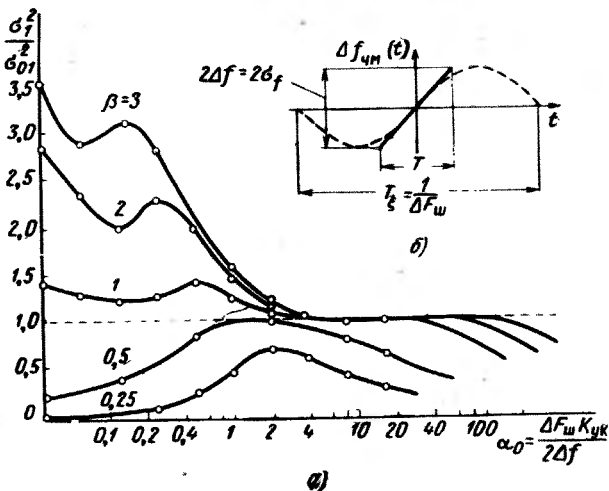


Рис. 4.10.

ной модуляции входного колебания в амплитудную. Этот эффект можно объяснить следующим образом. Преобразование частотной модуляции в амплитудную при прохождении оптимального фильтра ЧМ приемника будет

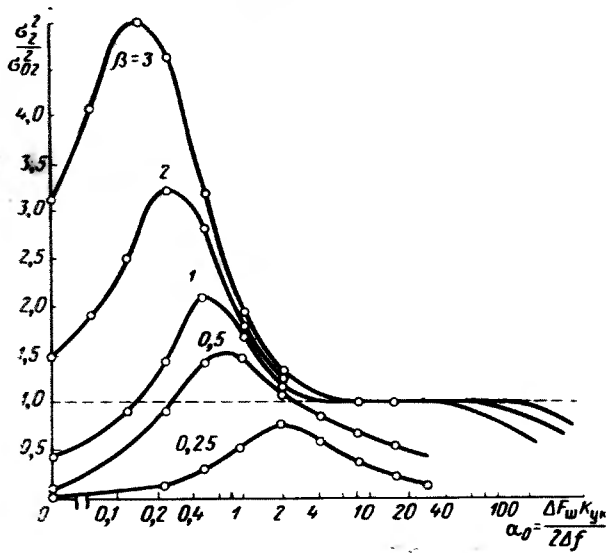


Рис. 4.11.

тем эффективнее, чем чаще закон частотной модуляции входного колебания приближается к линейному закону изменения частоты полезного сигнала. У входного ЧМ колебания отклонение частоты от средней изменяется по закону

$$\Delta f_{\text{ЧМ}}(t) = \sigma_j \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — модулирующий шумовой процесс.

Если в некотором интервале времени реализация процесса $\Delta f_{\text{ЧМ}}(t)$, пересекая нулевой уровень, изменяется приблизительно линейно и имеет наклон, близкий к наклону функции, модулирующей сигнал по частоте, то, очевидно, отрезок ЧМ колебания, соответствующий этому интервалу, будет восприниматься приемником как некоторое подобие полезного сигнала. В результате укороче-

ния на выходе оптимального фильтра появится большой выброс амплитуды.

Для оценки того, при каких условиях эффект укорочения будет наблюдаться наиболее часто и, следовательно, будет наблюдаться повышенная мощность флюктуаций на выходе приемника, предположим, что средняя величина наклона реализаций процесса $\Delta f_{\text{ЧМ}}(t)$ при пересечении нулевого уровня приблизительно равна наклону эквивалентного процессу $\Delta f_{\text{ЧМ}}(t)$ гармонического колебания с амплитудой σ_f и частотой $\Delta F_{\text{ш}}$, равной ширине спектра модулирующего шума. Тогда приближенным условием указанного экстремума должно быть равенство (рис. 4.10, б):

$$\pi \sigma_f / T_{\text{э}} = \Delta f_{\text{д}} / T.$$

Отсюда значение параметра α , при котором должен наблюдаться экстремум кривых интенсивностей на рис. 4.10 и 4.11, равно $\alpha^* = 1/\pi\beta K_{\text{УК}}$. Если кривые мощности строить в зависимости от нормированного параметра α , т. е. от $\alpha_0 = \alpha K_{\text{УК}}$, то положение экстремума для ЧМ приемников с различными $K_{\text{УК}}$ будет практически неизменным и будет наблюдаться при

$$\alpha_0^* = 1/\pi\beta. \quad (4.28)$$

В этом и состоит смысл нормировки параметра α на рис. 4.10 и 4.11. Легко видеть, что положения экстремумов кривых на рис. 4.10 и 4.11 примерно удовлетворяют условию (4.28).

Ярко выраженный эффект увеличения интенсивности флюктуаций на выходе ЧМ приемника с квадратичным детектором по сравнению со случаем линейного детектора объясняется тем, что квадратичный детектор «подчеркивает» большие выбросы.

Другое отличие ЧМ приемника с квадратичным детектором от ЧМ приемника с линейным детектором состоит в том, что при $\beta \geq 1$ выходная мощность флюктуаций ЧМ шумового колебания, нормированная по отношению к выходной мощности флюктуаций спектрально эквивалентного прямошумового воздействия, в экстремальных точках больше, чем в квазистационарных точках ($\alpha_0 \rightarrow 0$), рассчитанных в предположении, что амплитудно-частотная характеристика ЧМ приемника пря-

моугольная и ширина ее равна $2\Delta f_d$, где Δf_d — односторонняя девиация частоты ЧМ сигнала (см. рис. 4.2). Расчет производился по формулам (4.27).

На рис. 4.12 показаны гистограммы распределения ЧМ шумовых флюктуаций на выходе АМ приемника с линейным детектором при $\delta=0$ для различных значений

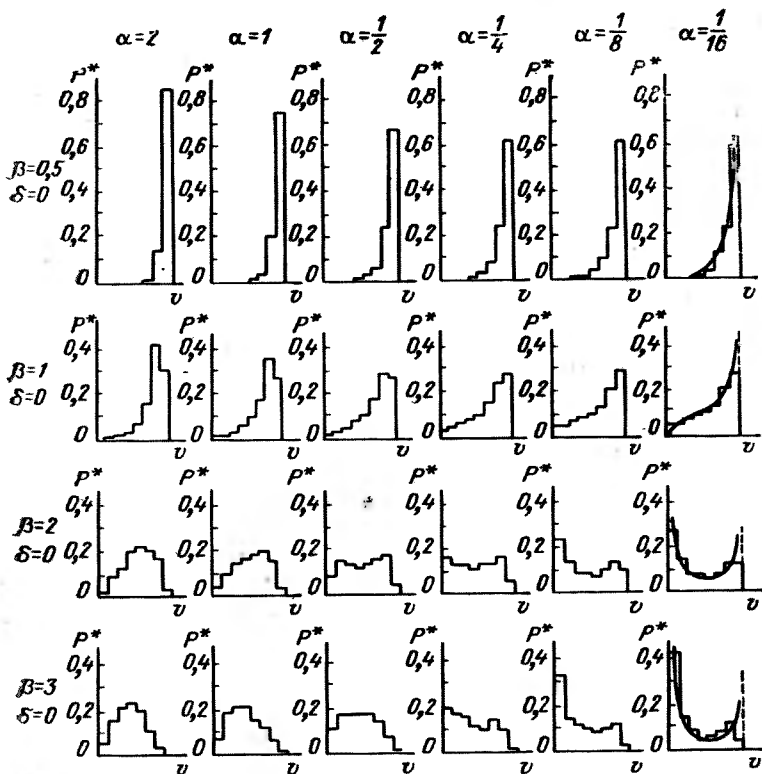


Рис. 4.12.

ний параметров α и β . Интервал возможных значений напряжения $v[n]$ был разбит на восемь одинаковых частей (разрядов). По оси ординат отложена вероятность (точнее, относительная частота) попадания случайной величины $v[n]$ в каждый из разрядов, вычисленная на ЦВМ с использованием 1000 значений чисел $v[n]$.

Гистограммы в левом нижнем углу подтверждают эффект нормализации ЧМ шумового колебания в радио-фильтре приемника (закон распределения огибающей близок к релейевскому закону).

Законы распределения флюктуаций ЧМ шумового колебания на выходе ЧМ приемника также имеют различную форму в зависимости от параметров колебания

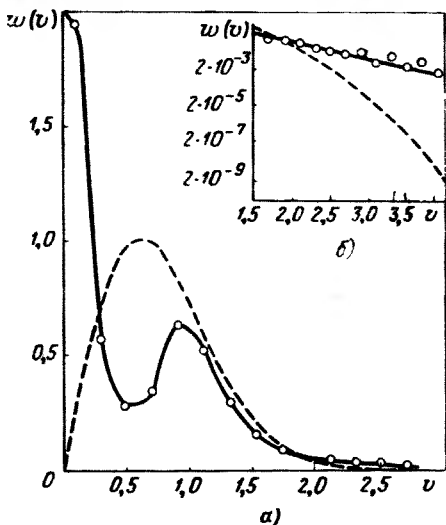


Рис. 4.13.

на входе. В области малых значений α плотности вероятностей напряжений на выходе ЧМ приемника имеют вид двух дельта-функций в точках 0 и 1 для линейного и квадратичного детекторов. Эти точки соответствуют двум значениям огибающей на выходе ОФ в квазистационарном случае [формула (4.26)].

При больших α происходит нормализация ЧМ шумового колебания в ОФ. Область нормализации, как и следовало ожидать, соответствует значениям $\sigma_{1,2}^2 / \sigma_{01,2}^2 = 1$ на рис. 4.10 и 4.11. Распределение флюктуаций на выходе ЧМ приемника в этих случаях приблизительно релейевское и показательное соответственно.

Наибольший интерес представляет распределение флюктуаций на выходе ЧМ приемника для промежуточ-

ных значений α , в частности в экстремальных точках. На рис. 4.13,а показана типичная кривая плотности вероятностей флюктуаций на выходе ЧМ приемника с линейным детектором для экстремальной точки $\alpha_0=0,2$, $\beta=2$, построенная по 10 000 реализаций (сплошная линия). Пунктиром для сравнения дана кривая плотности релейевского распределения флюктуаций при воздействии спектрально эквивалентного нормального шума. На рис. 4.13,б показаны эти же кривые в области больших выбросов напряжения в логарифмическом масштабе. Из рис. 4.13 видно, что кривая плотности вероятности флюктуаций ЧМ шумового колебания образуется путем «размывания» дельта-функций, расположенных в точках 0 и 1. Из рис. 4.13,б следует, что плотность вероятностей больших выбросов у ЧМ шумового колебания на выходе ЧМ приемника на несколько порядков превышает плотность вероятностей больших выбросов при воздействии спектрально эквивалентного нормального шума.

4.3. Применение цифрового моделирования для исследования вопросов радиолокационного сопровождения на фоне шумов

1. Постановка задачи

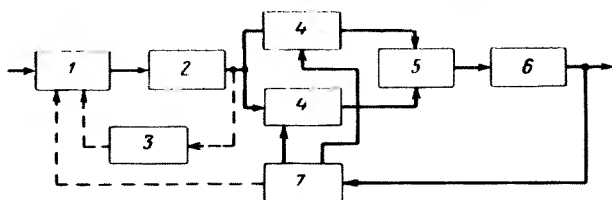
Среди большого числа разнообразных радиосистем одними из наиболее распространенных являются системы радиоавтоматики. В этом параграфе рассматриваются вопросы цифрового моделирования систем радиоавтоматики на примере радиолокационного автодальномера, приемник которого содержит либо инерционную систему АРУ, либо нелинейную систему, обеспечивающую логарифмическую амплитудную характеристику приемника.

В качестве объекта моделирования был выбран автодальномер, упрощенная функциональная схема которого показана на рис. 4.14.

Схема, показанная на рис. 4.14, является наиболее распространенной схемой автодальномера, в котором напряжение ошибки вырабатывается путем вычитания площадей участков импульса сигнала, совпадающих по времени с двумя селектирующими импульсами (полустробицами). Эта схема имеет характеристики, близкие к по-

тенциально достижимым [2] и в настоящее время широко используется на практике.

Конечной целью решения рассматриваемой здесь задачи было определение среднего времени до срыва слежения в автодальномере при воздействии шумовой стационарной помехи с учетом, с одной стороны, влияния АРУ и логарифмического УПЧ, применяемых для обеспечения широкого динамического диапазона и снижения



1-УПЧ, 2-амплитудный детектор, 3-цель обратной связи АРУ, 4-каскады совпадения, 5-вычитающее устройство, 6-сглаживающий фильтр, 7-управляемый генератор полустробов

Рис. 4.14.

уровня амплитудных флюктуаций сигнала, а с другой стороны, влияния динамических ошибок в следящей системе, возникающих при движении цели. В качестве промежуточных результатов требовалось получить дискриминационные и флюктуационные характеристики дискриминатора с АРУ и с логарифмическим УПЧ.

При решении задачи сделаны следующие предположения.

1. Отраженный от цели сигнал представляет собой гауссов радиопульс. Амплитуда сигнала флюктуирует по закону Релея, а начальная фаза — по равновероятному в интервале $(0, 2\pi)$ закону. Корреляционная функция амплитудных флюктуаций сигнала аппроксимируется экспонентой. На сигнал накладывается аддитивная шумовая помеха, эквивалентная нормальному белому шуму со спектральной плотностью N_0 .

2. УПЧ представляет собой обычный многокаскадный полосовой усилитель с колокольной частотной характеристикой, согласованной со спектром гауссова радиопульса. УПЧ содержит либо систему АРУ и тогда он имеет регулируемый коэффициент усиления и строится следящим стробом, длительность которого в не-

сколько раз превышает длительность импульса сигнала, либо нелинейную систему, обеспечивающую логарифмическую амплитудную характеристику приемника, причем систему настолько быстродействующую, что ее влияние можно свести к безынерционному логарифмическому преобразованию огибающей колебания на входе УПЧ.

3. Детектор является линейным безынерционным детектором огибающей.

4. Система АРУ описывается уравнением первого порядка. Цепь обратной связи АРУ представляет собой последовательное соединение однозвенного RC-фильтра с передаточной функцией $1/(1+pT_A)$ и безынерционного усилителя АРУ с коэффициентом усиления k_A (к такой схеме можно привести большинство реальных схем АРУ первого порядка [19]).

5. Генератор полустробов выдает прямоугольные селектирующие импульсы.

6. Следящая система дальномера имеет астатизм второго порядка. Передаточная функция ее в разомкнутом виде

$$K(p) = \frac{K_H^2(1+pT_H)}{p^2}. \quad (4.29)$$

(Электронный дальномер с двумя интеграторами и коррекцией [2], где T_H — постоянная времени корректирующей цепи, K_H — коэффициент передачи двух интеграторов.)

Полное решение поставленной задачи аналитическим путем связано со значительными трудностями, так как исследуемая система нелинейная и находится под воздействием неаддитивных (по отношению к измеряемому параметру) флюктуаций. Экспериментальное исследование этой задачи требует больших затрат времени и средств, в особенности на этапе проектирования, когда для эксперимента требуется создание физического макета автодальномера.

Ниже рассматривается решение этой задачи методом цифрового моделирования, который позволил сравнительно быстро получить необходимые результаты. Задача решалась в два этапа: сначала исследовались характеристики дискриминатора, т. е. высокочастотной части дальномера от входа приемника до выхода вычитающего устройства, а затем процессы слежения и срыва в сле-

дящей системе. На выходе дискриминатора снимались зависимости величины постоянной составляющей от величины рассогласования между центром импульса и серединой селектирующих импульсов для различных значений отношения помеха/сигнал (*дискриминационные характеристики*) и аналогичные зависимости флюктуационной составляющей (*флюктуационные характеристики*). Эти характеристики были входными данными при цифровом моделировании следящей системы.

2. Цифровая модель дискриминатора автодальномера с АРУ

Пусть $V(t) = \sum_n V(n, t - nT_{\Pi})$ — стробированная огиба-

ющая смеси сигнала с помехой на выходе УПЧ, где $V(n, t)$ — огибающая в n -м стробе; T_{Π} — период повторения импульсов; t — время, отсчитываемое от момента прихода импульса сигнала, отождествляемого с моментом прохождения огибающей импульса на выходе УПЧ через максимум. Напряжение на выходе дискриминатора в n -м периоде повторения пропорционально величине

$$z[n, \tau] = z_1[n, \tau] - z_2[n - \tau] = \\ = \frac{ik_1}{T_1} \int_{t_1 + \tau}^{t_1 + T_1 + \tau} V(n, t) dt - \frac{k_2}{iT_2} \int_{t_2 + \tau}^{t_2 + T_2 + \tau} V(n, t) dt, \quad (4.30)$$

где z_1 и z_2 — напряжения на выходе соответствующих каскадов совпадения; τ — величина рассогласования между центром отраженного импульса и положением селекторных импульсов; k_1 и k_2 — коэффициенты передачи каскадов совпадения (в общем случае неодинаковые); t_1 , T_1 и t_2 , T_2 — положение начала и длительность левого и правого селектирующих импульсов при нулевом рассогласовании соответственно.

В результате влияния шумов и флюктуаций сигнала последовательность $z[n, \tau]$ будет дискретным случайным процессом с периодом повторения T_{Π} (если пренебречь небольшим искажением периода за счет рассогласования τ). Зависимость среднего значения $m_z(\tau)$ процесса

$z[n, \tau]$ от величины τ есть дискриминационная характеристика, а зависимость дисперсии $\sigma_z^2(\tau)$ — флюктуационная характеристика дискриминатора. Под крутизной дискриминатора K_d понимается значение производной $dm_z(\tau)/d\tau$ при $\tau=0$. Целью исследования дискриминатора является получение указанных характеристик.

В дискретной форме величина $z[n, \tau]$ выразится в виде

$$z[n, r] = \frac{k_1}{N_1} \sum_{m=m_1+r}^{m_1+N_1+r} V[n, m] - \frac{k_2}{N_2} \sum_{m=m_2+r}^{m_2+N_2+r} V[n, m],$$

где $V[n, m] = V(n, m\Delta t)$ — дискретная огибающая в n -м строке с шагом Δt ; $N_1 = T_1/\Delta t$, $N_2 = T_2/\Delta t$ — число дискрет в пределах левого и правого полустрбов соответственно; $m_1 = t_1/\Delta t$, $m_2 = t_2/\Delta t$ — начальные положения полустрбов в дискретном времени; $r = \tau/\Delta t$ — дискретное рассогласование.

В дальнейшем для удобства представим УПЧ в виде последовательного соединения линейного оптимального фильтра, частотная характеристика которого сопряжена со спектром гауссова радиоимпульса, а коэффициент передачи на резонансной частоте равен единице, и безынерционного усилителя с регулируемым коэффициентом усиления. Такое представление позволяет записать

$$V(n, t) = k_n[n] E(n, t), \quad V[n, m] = k_n[n] E[n, m], \quad (4.31)$$

где $k_n[n]$ — значение коэффициента усиления УПЧ в n -м периоде повторения (предполагается, что в течение строба коэффициент усиления остается практически неизменным); $E(n, t)$, $E[n, m]$ — непрерывная и дискретная огибающие на выходе ОФ соответственно.

Огибающую $E(n, t)$ выразим через квадратурные составляющие сигнала и шума по известной формуле

$$E(n, t) = [(E_{c_1}(n, t) + E_{ш_1}(n, t))^2 + (E_{c_2}(n, t) + E_{ш_2}(n, t))^2]^{1/2}, \quad (4.32)$$

где индекс ш относится к шуму, а индекс с — к сигналу.

При принятом законе флюктуаций сигнала для составляющих $E_{c1,2}(n, t)$ справедливы выражения

$$E_{c1}(n, t) = E_{c1}[n] s(t),$$

$$E_{c2}(n, t) = E_{c2}[n] s(t).$$

Здесь $E_{c1}[n]$, $E_{c2}[n]$ — независимые между собой дискретные нормальные случайные процессы с нулевым средним значением, дисперсией σ_c^2 и экспоненциальной корреляционной функцией

$$R_c[n] = \sigma_c^2 \exp\left(-\frac{T_n}{T_c} |n|\right),$$

где T_c — интервал корреляции амплитудных флюктуаций сигнала (на уровне $1/e$); $s(t)$ — функция, описывающая закон изменения огибающей импульса на выходе фильтра УПЧ.

Положим, что функция $s(t)$ нормирована, так что $s_{\text{макс}} = s(0) = 1$, тогда σ_c^2 есть средняя мощность сигнала в максимуме импульса на выходе фильтра УПЧ. Поскольку гауссов импульс после оптимальной фильтрации сохраняет свою форму, то можно записать

$$s(t) = \exp\left(-\pi t^2 / \tau_n\right), \quad (4.33)$$

где $\tau_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$ — длительность импульса на выходе фильтра УПЧ. В дальнейшем функция $s(t)$ называется сигнальной функцией.

Квадратурные составляющие шума на выходе ОФ при принятых допущениях являются, как известно, независимыми между собой нормальными случайными процессами с одинаковыми корреляционными функциями, совпадающими по форме с сигнальной функцией, т. е.

$$R_{ш}(\tau) = \sigma_m^2 s(\tau) = \sigma_m^2 e^{-\pi \tau^2 / \tau_n^2}. \quad (4.34)$$

Поскольку период повторения импульсов сигнала РЛС обычно гораздо больше интервала корреляции шума на выходе УПЧ, то можно считать, что реализации $E_{ш1}(n, t)$ и $E_{ш2}(n, t)$ квадратурных составляющих шума на выходе ОФ независимы от периода к периоду.

Теперь нетрудно получить алгоритмы для формирования на ЦВМ дискретных квадратурных составляющих сигнала и шума в формуле (4.32), т. е. дискретных процессов.

$$E_{c_{1,2}}[n, m] = E_{c_{1,2}}[n] s(m \Delta t),$$

$$E_{ш_{1,2}}[n, m] = E_{ш_{1,2}}(n, m \Delta t).$$

При экспоненциальной корреляционной функции флюктуаций сигнала последовательности $E_{c1}[n]$ и $E_{c2}[n]$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям (см. алгоритм № 1 в табл. 2.2):

$$E_{c_{1,2}}[n] = \sigma_c \sqrt{1 - \rho_c^2} x_{1,2}[n] + \rho_c E_{c_{1,2}}[n-1],$$

где $\rho_c = e^{-T_u/T_c}$ — коэффициент корреляции между соседними импульсами сигнала; $x_1[n]$, $x_2[n]$ — последовательности независимых между собой нормальных случайных чисел с параметрами (0, 1).

Для вычисления значений $s[m]$ в соответствии с (4.33) получаем формулу

$$s[m] = \exp(-\pi m^2 / m_n^2),$$

где $m_n = \tau_n / \Delta t$ — количество дискретных значений сигнальной функции $s(t)$ в пределах длительности импульса.

Для формирования дискретных квадратурных составляющих шума, имеющих гауссову корреляционную функцию вида (4.34), воспользуемся готовым алгоритмом (алгоритм № 7 в табл. 2.1), положив в нем $\omega_* = \sqrt{\pi} / \tau_n$:

$$E_{ш_{1,2}}[n, m] = \sum_c^p c[k] x_{ш_{1,2}}[n, m^* - k], \quad (4.35)$$

где $c[k] = \sigma_{ш} \frac{\sqrt{2\gamma_*}}{4\sqrt{\pi}} e^{-2\gamma_* k^2}$; $\gamma_* = \sqrt{\pi} \frac{\Delta t}{\tau_n} = \frac{\sqrt{\pi}}{m_n}$;

$x_{ш_{1,2}}[n, m]$ — независимые между собой последовательности независимых нормальных случайных чисел с параметрами (0, 1); p — параметр, выбираемый исходя из точности формирования корреляционной функции (см. § 2.2, п. 2).

Аргумент n у последовательностей $x_{ш_{1,2}}[n, m]$ в формуле (4.35) указывает на то, что последовательности $x_{ш_{1,2}}[n+1, m]$, $m=1, 2, \dots$, формируются независимо от последовательностей $x_{ш_{1,2}}[n, m]$, $m=1, 2, \dots$

Найдем теперь алгоритм формирования коэффициента усиления приемника $k_{\Pi}[n]$, определяемого действием АРУ, как функцию номера периода повторения. Для этого аппроксимируем регулировочную характеристику УПЧ линейной. Тогда зависимость коэффициента усиления от напряжения регулирования u_p будет иметь вид

$$k_{\Pi} = f(u_p), f(u_p) = \begin{cases} k_0 - bu_p, & bu_p \leq k_0, \\ 0 & bu_p > k_0. \end{cases} \quad (4.36)$$

где b — коэффициент наклона регулировочной характеристики. Величина k_{Π} как функция номера периода повторения равна

$$k_{\Pi}[n] = f(u_p[n]), \quad (4.37)$$

где $u_p[n] = u_p(nT_{\Pi})$ — величина регулировочного напряжения к моменту прихода n -го импульса.

Напряжение регулирования зависит от времени по закону

$$u_p(t) = k_{\Lambda} \int_0^t h_{\Lambda}(\tau) u_{\Lambda}(t - \tau) d\tau,$$

где $h_{\Lambda}(t)$ — импульсная переходная характеристика фильтра АРУ, равная

$$\frac{1}{\tau_{\Lambda}} e^{-t/\tau_{\Lambda}}, \quad t \geq 0;$$

τ_{Λ} — постоянная времени фильтра АРУ.

В рассматриваемой здесь инерционной схеме АРУ постоянная времени τ_{Λ} значительно больше периода повторения. Поскольку в импульсных РЛС длительность импульса обычно во много раз меньше периода повторения, то сигнал $u_{\Lambda}(t)$ на входе АРУ можно рассматривать как последовательность дельта-функций, следующих через промежуток времени T_{Π} и имеющих огибающую $u_{\Lambda}[n] = \bar{V}[n]T$, где

$$V[n] = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2} + \tau}^{\frac{T}{2} + \tau} V(n, t) dt \approx \frac{1}{N} \sum_{m=-\frac{N}{2} + r}^{\frac{N}{2} + r} V[n, m], \quad N = \frac{T}{\Delta t}, \quad (4.38)$$

— среднее значение огибающей смеси сигнала с помехой на выходе УПЧ в пределах строба.

При периодическом воздействии в виде дельта-функций значения регулировочного напряжения на выходе фильтра АРУ в моменты времени $t_n = nT_{\Pi}$ можно выразить в виде

$$u_p[n] = k_A \frac{T}{\tau_A} \sum_{k=0}^n \bar{V}[n] e^{-\frac{T_{\Pi}}{\tau_A}(n-k)}. \quad (4.39)$$

Формуле дискретной свертки (4.39), как уже неоднократно отмечалось, соответствует рекуррентное разностное уравнение первого порядка:

$$u_p[n] = k_A \frac{T}{\tau_A} v[n], \quad v[n] = \rho_A v[n-1] + V[n], \quad (4.40)$$

где $\rho_A = e^{-(T_{\Pi}/\tau_A)}$.

Необходимо также ввести коэффициент усиления $k_{обр}$ в петле обратной связи АРУ. Под этой величиной понимается отношение приращения коэффициента усиления УПЧ к приращению напряжения $\bar{V}[n]$ на входе цепи обратной связи АРУ в установившемся режиме, т. е. при $\bar{V}[n] = \text{const}$.

Коэффициент передачи цепи обратной связи АРУ, поведение которой описывается уравнениями (4.36), (4.37) и (4.40), как нетрудно показать, равен $k_A \frac{T}{\tau_A} \frac{1}{1-\rho_A}$, следовательно,

$$k_{обр} = bk_A T / (1 - \rho_A) \tau_A.$$

Теперь, после того как выяснена зависимость напряжения регулирования от сигнала на выходе УПЧ, можно найти величину коэффициента усиления приемника в каждом периоде. Для этого необходимо решить относительно $\bar{V}[n]$ уравнение (см. § 3.5):

$$\begin{aligned} \bar{V}[n] &= \bar{E}[n] (k_0 - bu_p[n]) = \\ &= \bar{E}[n] \left[k_0 - bk_A \frac{T}{\tau_A} (\rho_A v[n-1] + v[n]) \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

где

$$\bar{E}[n] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(n, t) dt \approx \frac{1}{N} \sum_{m=-N/2+r}^{N/2+r} E[n, m]$$

— среднее значение отгибающей в стробе на выходе фильтра УПЧ.

Уравнение (4.41) составлено в соответствии с выражениями (4.31), (4.36), (4.37) и (4.40). Оно описывает процессы в замкнутой системе АРУ. Благодаря замене дискретной свертки (4.39) рекуррентной формулой (4.40) это уравнение легко решается. В результате получим

$$k_{\Pi} [n] = \frac{k_0 - k_{\text{осп}} \rho_A (1 - \rho_A) v [n - 1]}{1 + k_{\text{осп}} (1 - \rho_A) \bar{E} [n]}. \quad (4.42)$$

Таким образом, основные процессы в дискриминаторе с АРУ полностью формализованы. Окончательно, объединяя алгоритмы, моделирующие отдельные звенья и процессы, получим следующую дискретную математическую модель дискриминатора с АРУ, предназначенную для реализации на ЦВМ:

$$\begin{aligned} z [n, r] &= z_1 [n, r] - z_2 [n, r], \\ z_{1,2} [n, r] &= k_{\Pi} [n] \frac{k_{1,2}}{N_{1,2}} \sum_{m=m_{1,2} + r}^{m_{1,2} + N_{1,2} + r} E [n, m], \\ k_{\Pi} [n] &= \frac{k_0 - k_{\text{осп}} \rho_A (1 - \rho_A) v [n - 1]}{1 + k_{\text{осп}} (1 - \rho_A) \bar{E} [n]}, \\ v [n - 1] &= k_{\Pi} [n - 1] \bar{E} [n - 1] + \rho_A v [n - 2], \\ \bar{E} [n] &= \frac{1}{N} \sum_{m=-N/2+r}^{N/2+r} E [n, m], \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} E [n, m] &= \sigma_c [(E_{e_1}^0 [n, m] + Q E_{m_1}^0 [n, m])^2 + \\ &+ (E_{e_2}^0 [n, m] + Q E_{m_2}^0 [n, m])^2]^{1/2}, \\ E_{c_{1,2}}^0 [n, m] &= E_{c_{1,2}}^0 [n] s [m], \end{aligned}$$

$$E_{c_{1,2}}^0 [n] = \sqrt{1 - \rho_c^2 x_{c_{1,2}} [n] + \rho_c E_{c_{1,2}}^0 [n - 1]},$$

$$E_{\text{ш}_{1,2}}^0 [n, m] = \sum_{k=-p}^p c [k] x_{\text{ш}} [n, m - k],$$

$x_c [n]$, $x_{\text{ш}} [n, m]$ — независимые (при различных n и m и при различных индексах) случайные нормальные числа с параметрами (0, 1).

Коэффициенты $s[m]$, $c[k]$, ρ_c , ρ_A остаются неизменными при решении данного варианта задачи и вычисляются перед началом решения по формулам

$$s[m] = \exp(-\pi m^2 / m_n^2), \quad (4.44)$$

$$c[k] = \frac{\sqrt{2\gamma_*}}{\sqrt[4]{\frac{2\gamma_*}{\pi}}} \exp(-2\gamma_*^2 k^2), \quad (4.45)$$

$$\rho_c = \exp\left(-\frac{T_n}{T_0}\right), \quad \rho_A = \exp\left(-\frac{T_n}{\tau_A}\right). \quad (4.46)$$

Параметры $k_{1,2}$; $N_{1,2}$; $m_{1,2}$; k_0 ; $k_{обр}$; N ; m_n ; $\frac{T_n}{T_0}$; $\frac{T_n}{\tau_A}$; Q

являются исходными данными. Требуется пояснения дополнительно введенный параметр Q . Он равен отношению мощности шума на выходе ОФ к дисперсии сигнала (отношение шум/сигнал). Параметр Q , как известно, может быть представлен в следующем виде:

$$Q^2 = N_0 / \mathcal{E}_n, \quad (4.47)$$

где N_0 и \mathcal{E}_n спектральная плотность шума и средняя энергия сигнала в импульсе на входе приемника соответственно.

3. Цифровая модель дискриминатора автодальномера с логарифмическим приемником

Эта модель в данном случае является более простой, чем модель дискриминатора с АРУ. При принятых допущениях цифровую модель дискриминатора с логарифмическим приемником можно легко получить из цифровой модели дискриминатора с АРУ [формулы (4.43) — (4.46)], если положить в последней

$$k_n[n] \equiv 1; \quad z_{1,2}[n, r] = \frac{k_{1,2}}{N_{1,2}} \sum_{m=m_{1,2} + r}^{m_{1,2} + N_{1,2} + r} \ln(1 + \beta E[n, m]), \quad (4.48)$$

где β — параметр логарифмической кривой.

Во всем остальном алгоритм такой же, как и (4.43) — (4.46). При этом величина $\bar{E}[n]$ не вычисляется. Параметр β можно рассматривать как безразмерный. Он характеризует отношение среднеквадратического значения

сигнала σ_c к размаху линейного участка логарифмической характеристики*), поэтому его можно назвать уровнем ограничения (чем больше β , тем сильнее проявляются нелинейные свойства логарифмического приемника).

4. Эквивалентная функциональная схема автодальномера как следящей системы

При исследовании процессов в следящей системе удобно ввести относительное рассогласование $\varepsilon = \tau/\tau_{и}$, т. е. измерять рассогласование в длительностях импульса; вместо характеристик $m_z(\tau)$ и $\sigma_z^2(\tau)$ ввести характеристики $m_z(\varepsilon)$ и $\sigma_z^2(\varepsilon)$ и, наконец, поскольку обычно частота повторения РЛС

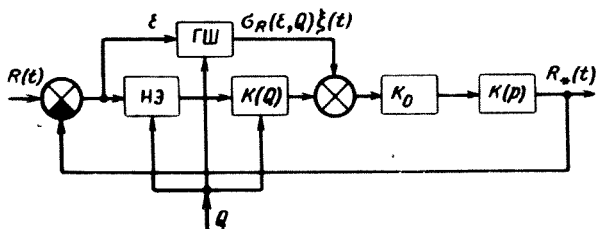


Рис. 4.15.

гораздо больше полосы пропускания следящей системы, можно пренебречь дискретностью измерения дальности. Тогда с точки зрения теории автоматического регулирования рассматриваемая здесь схема дальномера эквивалентна непрерывной нелинейной следящей системе, функциональная схема которой представлена на рис. 4.15.

Обозначения на этом рисунке следующие.

$R(t)$ — нормированный измеряемый параметр (дальность), равный отношению истинной дальности к величине элемента разрешения по дальности, т. е. к величине $c\tau_{и}/2$, где c — скорость света; $R_*(t)$ — измеренное значение нормированной дальности; $\varepsilon = R - R_*$ — ошибка измерения нормированной дальности, равная временному рассогласованию τ между центром сигнального импульса и серединой полустрелов, выраженному в длительно-

* Лине́йный участок амплитудной характеристики вида $\ln(1+x)$ соответствует значениям x от 0 до 1—1.5.

стях сигнального импульса, т. е. $R - R_* = \tau/\tau_n$; НЭ — нелинейный безынерционный элемент с характеристикой нелинейности $m_0(\epsilon, Q)$, представляющей собой дискриминационную кривую $m_z(\epsilon, Q)$, нормированную так, что крутизна ее равна единице ($\partial m_0(\epsilon, Q)/\partial \epsilon = 1$ при $\epsilon = 0$); Q^2 — отношение помеха/сигнал [см. формулу (4.47)]; ГШ — управляемый генератор шума с дисперсией флуктуаций $\sigma_R^2(\epsilon, Q)$, равной дисперсии флуктуаций на выходе дискриминатора, пересчитанных во флуктуации измеряемого параметра R : $\sigma_R(\epsilon, Q) = \sigma_z(\epsilon, Q)/K_{дн}$, $K_{дн} = \partial m_z(\epsilon, 0)/\partial \epsilon$ при $\epsilon = 0$; $\xi(t)$ — безразмерный случайный процесс с единичной дисперсией; $K(Q) = \frac{\partial m_z(\epsilon, Q)}{\partial \epsilon} \frac{1}{K_{дн}}$ —

коэффициент усиления в контуре слежения за параметром R , зависящий от отношения помеха/сигнал, так что $K(Q) = 1$ при $Q = 0$ и $K(Q) < 1$ при $Q > 0$; $K_{дн}$ — номинальная крутизна дискриминатора при отсутствии помехи; K_0 — номинальный коэффициент усиления по измеряемому параметру R в петле обратной связи при отсутствии помехи; $K(p)$ — передаточная функция сглаживающего фильтра автодальномера.

Эквивалентная схема автодальномера представлена в таком виде, что все ее переменные и постоянные параметры являются безразмерными, хотя имеют вполне определенный физический смысл. Это делает схему более обобщенной и упрощает ее математический анализ.

Важной особенностью эквивалентной схемы следящей системы является зависимость ее характеристик от отношения шум/сигнал Q^2 , и в первую очередь зависимость коэффициента усиления $K(Q)$, который изменяется (уменьшается с ростом Q) в весьма больших пределах. Последнее обусловлено уменьшением крутизны дискриминатора, которое вызывается нормирующим действием нелинейных элементов приемника (детектор, АРУ, логарифмический УПЧ). Форма дискриминационной кривой $m_0(\epsilon, Q)$, как показано ниже, при воздействии шума изменяется незначительно. В результате нормирующего действия АРУ и логарифмического приемника незначительно изменяется также и дисперсия σ_R^2 флуктуаций на выходе дискриминатора.

Флуктуации на выходе дискриминатора в общем случае коррелированы от периода к периоду. Это отно-

сится лишь к так называемой параметрической составляющей флюктуации [2], вызванной медленными замираниями амплитуды сигнала. Составляющую флюктуаций, вызванную шумовой помехой, можно считать некоррелированной, поскольку обычно период повторения зондирующих импульсов РЛС гораздо больше интервала корреляции помехи. Как будет показано, интенсивность параметрических флюктуаций даже при малых отношениях помеха/сигнал составляет небольшую долю общей интенсивности флюктуаций на выходе дискриминатора; к тому же параметрические флюктуации значительно ослабляются демодулирующим действием АРУ или системы логарифмической нормировки. Поэтому в дальнейшем предполагается, что медленными параметрическими флюктуациями можно пренебречь, т. е. считать флюктуации на выходе дискриминатора некоррелированными. В таком предположении случайный процесс $\xi(t)$, который является непрерывным эквивалентом нормированных флюктуаций на выходе дискриминатора, в соответствии с теоремой Котельникова, обобщенной на случайные процессы, представляет собой шум с равномерной в полосе $(-F_{\Pi}/2, F_{\Pi}/2)$ спектральной плотностью, равной

$$\sigma_R^2(\epsilon, Q)/F_{\Pi} = T_{\Pi} \sigma_R^2(\epsilon, Q),$$

где F_{Π} и T_{Π} — частота и период повторения РЛС соответственно. Напомним, что в этой книге всюду используется двусторонняя спектральная плотность мощности шума (для положительных и отрицательных частот).

5. Цифровая модель следящей системы автодальномера

Для дискретного представления следящей системы заменим в эквивалентной схеме автодальномера непрерывной сглаживающий фильтр с передаточной функцией (4.29) эквивалентным дискретным фильтром. Используя результаты примера 1 § 3.3, можно сразу записать рекуррентное уравнение для вычисления дискретных значений $R_*[n]$ параметра $R_*(t)$ на выходе следящей системы:

$$R_*[n] = a_0 \Delta R[n] + a_1 \Delta R[n-1] + a_2 \Delta R[n-2] + \\ + 2R_*[n-1] - R_*[n-2],$$

где $\Delta R[n]$ и $R_*[n]$ — значения сигналов на входе и выходе сглаживающего фильтра соответственно в моменты времени $t_n = n\Delta t_c$; Δt_c — шаг дискретизации следящей системы, $a_k, k=0, 2$ — коэффициенты, определяемые методом дискретной аппроксимации [их можно вычислить по формулам (3.71), (3.73), (3.74), (3.77)]

Поскольку

$$\Delta R[n] = m_0(\varepsilon[n], Q)K(Q) + \sigma_R(\varepsilon[n], Q)\xi[n],$$

где $\varepsilon[n] = R[n] - R_*[n]$, то при вычислении последовательности $R_*[n]$, вообще говоря, следовало бы решать на каждом шаге относительно $R_*[n]$ нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} R_*[n] = & a_0 \{ m_0(R[n] - R_*[n], Q)K(Q) + \sigma_R(R[n] - \\ & - R_*[n], Q)\xi[n] \} + a_1 \Delta R[n-1] + a_2 \Delta R[n-2] + \\ & + 2R_*[n-1] - R_*[n-2], \end{aligned} \quad (4.49)$$

используя при этом нелинейные зависимости $m_0(\varepsilon, Q)$ и $\sigma_R(\varepsilon, Q)$ как функции ε .

Чтобы не решать нелинейное уравнение (4.49), введем в цепь обратной связи эквивалентной дискретной следящей системы элемент запаздывания на время Δt_c (см. § 3.6, п. 3); тогда цифровая модель следящей системы автодальномера примет следующий простой вид:

$$\begin{aligned} R_*[n] = & a_0 \Delta R[n] + a_1 \Delta R[n-1] + a_2 \Delta R[n-2] + \\ & + 2R_*[n-1] - R_*[n-2], \end{aligned} \quad (4.50)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta R[n] = & m_0(R[n] - R_*[n-1], Q)K(Q) + \\ & + \sigma_R(R[n] - R_*[n-1], Q)\xi[n]. \end{aligned}$$

Остановимся теперь на выборе шага дискретизации Δt_c и алгоритме формирования дискретного случайного процесса $\xi[n]$.

В рассматриваемой системе наиболее высокочастотным процессом является шум $\xi(t)$. Если исходить из спектра этого процесса, то нужно было бы в соответствии с теоремой Котельникова брать шаг Δt_c равным периоду повторения импульсов T_{Π} . Однако, поскольку T_{Π} во много раз меньше постоянной времени следящей си-

стемы, выбор Δt_c из указанного условия требовал бы большего количества вычислений при цифровом моделировании процессов в следящей системе. В рассматриваемом случае можно сократить вычислительные затраты путем увеличения шага дискретизации. Действительно, поскольку спектр шума $\xi(t)$ равномерный и значительно

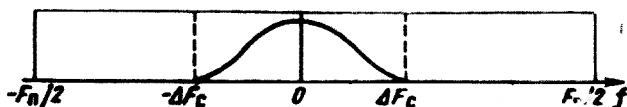


Рис. 4.16.

шире полосы пропускания сглаживающего фильтра следящей системы, действие этого шума практически эквивалентно действию более низкочастотного шума $\xi^0(t)$, ширина спектра которого порядка полосы пропускания системы, а спектральная плотность такая же, как и у шума $\xi(t)$. Это положение иллюстрирует рис. 4.16, где сплошным и пунктирным прямоугольниками показаны спектр шума $\xi(t)$ и спектр эквивалентного шума $\xi^0(t)$ соответственно, ΔF_c — полоса пропускания следящей системы. Исходя из этих соображений, можно положить $\Delta t_c = 1/2\Delta F_c$, тогда случайные величины $\xi^0[n]$ нужно брать не с единичной дисперсией, как это было бы при $\Delta t_c = T_n$, а с дисперсией, равной $T_n/\Delta t_c$. Ввиду нормализации шума в сглаживающем фильтре следящей системы закон распределения случайных величин $\xi^0[n]$ можно принять нормальным. Эти величины должны быть, очевидно, независимыми.

Итак, цифровое моделирование следящей системы автодальномера сводится к расчетам по формуле (4.50), где $\xi[n]$ — последовательность независимых случайных величин с параметрами $(0, T_n/\Delta t_c)$.

6. Аналитические оценки влияния шума на характеристики автодальномера

При определенных допущениях влияние шума на характеристики дискриминатора автодальномера с АРУ и логарифмическим приемником можно оценить аналитически. Приведем аналитические оценки, которые позволят в дальнейшем проконтролировать, а в некоторых случаях дополнить результаты исследования характеристик автодальномера методом моделирования.

Возьмем наиболее распространенный случай, когда селективирующие импульсы дискриминатора имеют одинаковую длительность, равную длительности импульса ($T_1 = T_2 = \tau_n$), и расположены вплотную ($t_1 = -\tau_n$, $t_2 = 0$). Положим также, что дискриминатор строго симметричен, т. е. коэффициенты k_1 и k_2 в формуле (4.30) удовлетворяют условию $k_1 = k_2 = 1$.

Обозначим операцию дискриминирования, определяемую формулой (4.30), следующим образом:

$$z = \Delta_{\bullet} [V(t)] = z_1 - z_2 = \frac{1}{\tau_n} \int_{\tau_n(\varepsilon-1)}^{\tau_n \varepsilon} V(t) dt - \frac{1}{\tau_n} \int_{\tau_n \varepsilon}^{\tau_n(\varepsilon+1)} V(t) dt. \quad (4.51)$$

В соответствии с определениями, данными в п. 2, дискриминационные и флюктуационные характеристики дискриминатора — это зависимости среднего значения $m_z(\varepsilon)$ и дисперсии $\sigma_z^2(\varepsilon)$ [или среднеквадратического значения $\sigma_z(\varepsilon)$] напряжения на выходе дискриминатора от рассогласования $\varepsilon = \tau/\tau_n$, т. е.

$$m_z(\varepsilon) = M \{ \Delta_{\bullet} [V(t)] \}, \quad \sigma_z^2(\varepsilon) = D \{ \Delta_{\bullet} [V(t)] \}. \quad (4.52)$$

Используя свойство линейности операции дискриминирования, выражения (4.52) можно записать

$$m_z(\varepsilon) = \Delta_{\bullet} [m_V(t)], \quad \sigma_z^2(\varepsilon) = D \{ \Delta_{\bullet} [V^0(t)] \}, \quad (4.53)$$

где $m_V(t)$ — математическое ожидание случайного процесса $V(t)$; $V^0(t)$ — центрированный случайный процесс $V(t)$.

Нормированные дискриминационные характеристики $m_0(\varepsilon)$ и $\sigma_R^2(\varepsilon)$, а также зависимость $K(Q)$ получаются, по определению, из ненормированных характеристик по следующим формулам:

$$m_0(\varepsilon) = m_z(\varepsilon) / K_{\text{дн}}; \quad \sigma_R(\varepsilon) = \frac{\sigma_z(\varepsilon)}{K_{\text{дн}}};$$

$$K(Q) = \frac{K_{\text{дн}}}{K_{\text{дн}}}; \quad K_{\text{дн}} = \left. \frac{dm_z(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Дискриминатор с АРУ

Система АРУ в нормальном режиме в соответствии с ее назначением поддерживает средний уровень напряжения \bar{V} [см. (4.38)] постоянным, а медленные флюктуации этого напряжения сглаживает. Сглаживающие свойства АРУ определяются отношением времени корреляции флюктуаций напряжения \bar{V} к эквивалентной постоянной времени АРУ. При отсутствии помехи ширина спектра флюктуаций \bar{V} равна ширине спектра медленных амплитудных флюктуаций сигнала ΔF_c . С увеличением интенсивности помехи ширина спектра флюктуаций \bar{V} увеличивается, в пределе (при $Q \rightarrow \infty$) в $F_{\text{п}}/\Delta F_c$ раз, где $F_{\text{п}}$ — частота повторения импульсов. Поскольку, как правило, $F_{\text{п}}/\Delta F_c \gg 1$, то АРУ не сглаживает быстрые флюктуации, вы-

званные помехой. В связи с этим рассмотрим следующий режим работы АРУ, а именно положим, что АРУ сглаживает параметрические флюктуации настолько, что ими можно пренебречь, но совсем не сглаживает быстрые флюктуации помехи. Такое предположение дает возможность довольно просто найти необходимые характеристики дискриминатора в двух крайних случаях: при отсутствии помех и при больших помехах, так как в обоих случаях коэффициент передачи приемника постоянен во времени и определяется выражением

$$k_n [n] = k_n = C/M\{\bar{E}\} = C/\overline{m_E(t)}, \quad (4.54)$$

где C — некоторая константа (в дальнейшем положим $C=1$); $M\{\bar{E}\}$ — математическое ожидание усредненной по стробу огибающей на выходе ОФ, равное усредненному по стробу математическому ожиданию огибающей на выходе ОФ.

При более общих предположениях коэффициент передачи приемника с АРУ изменяется от периода к периоду и находится в сложной статистической зависимости от значения напряжения \bar{E} в данном периоде и предыдущих периодах, что весьма затрудняет аналитическое исследование флюктуаций на выходе дискриминатора.

Согласно (4.31) и (4.54) напряжение на выходе приемника равно

$$V(t) = E(t)/\overline{m_E(t)}. \quad (4.55)$$

При нормальном шуме и принятом законе флюктуаций сигнала огибающая $E(t)$ смеси сигнала с шумом, как известно, распределена по релеевскому закону с параметрами

$$m_E(t) = \left[\frac{\pi}{2} (\sigma_c^2(t) + \sigma_{ш}^2) \right]^{1/2},$$

$$\sigma_E^2(t) = \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) (\sigma_c^2(t) + \sigma_{ш}^2), \quad (4.56)$$

где $\sigma_c^2(t) = \sigma_c^2 s^2(t)$.

Положим, не нарушая общности, $\sigma_c^2 = 1$. Тогда

$$m_E(t) = \left[\frac{\pi}{2} (s^2(t) + Q^2) \right]^{1/2}, \quad \sigma_E^2(t) = \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) (s^2(t) + Q^2). \quad (4.57)$$

Подставляя $m_E(t)$ из (4.57) в (4.55) и учитывая соотношение (4.53), для дискриминационной кривой получим следующее выражение:

$$m_z(\epsilon) = \frac{\Delta_s [\sqrt{s^2(t) + Q^2}]}{\sqrt{s^2(t) + Q^2}} = \frac{\Delta_s [y_1(t, Q)]}{y_1(t, Q)},$$

где $y_1(t, Q) = \sqrt{s^2(t) + Q^2}$.

Отсюда при отсутствии помех

$$m_z(\epsilon) = \Delta_s [s(t)]/s(t) = \frac{T}{\tau_n} \Delta_s [s(t)], \quad (4.58)$$

а при больших помехах ($Q \gg 1$), поскольку $\sqrt{Q^2 + s^2(t)} \approx Q + s^2(t)/2Q$ и $Q^2 + s^2(t) \approx Q^2$, то

$$m_x(\epsilon) = \Delta_\epsilon [s^2(t)]/2Q^2. \quad (4.59)$$

При выводе формулы (4.58) учтено, что

$$\overline{s(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2} + \tau}^{\frac{T}{2} + \tau} s(t) dt = \frac{\tau_n}{T},$$

если импульс не выходит за пределы строга.

Задаваясь конкретными аппроксимациями сигнальной функции $s(t)$, можно по формулам (4.58) и (4.59) найти конкретные дискриминационные кривые. Однако можно сделать некоторые выводы, справедливые при любых формах сигнальной функции.

Действительно, из формул (4.58) и (4.59) видно, что дискриминационная кривая деформируется в результате воздействия помех: при переходе от $Q=0$ к $Q \gg 1$ дискриминационная кривая изменяется так, как если бы вместо сигнальной функции $s(t)$ взять $s^2(t)$. Это, вообще говоря, приводит к некоторому сужению дискриминационной кривой, например при гауссовой форме кривой $s(t)$ сужение будет в $\sqrt{2}$ раз. Однако это сужение незначительно (при прямоугольной аппроксимации сигнальной функции сужения, очевидно, вообще не происходит).

Для нахождения крутизны дискриминатора при произвольной форме сигнальной функции воспользуемся следующим допущением. При $T_1 = T_2 = \tau_n$ сигнальная функция $s(t)$ обычно полностью «вмещается» в интервал $(-\tau_n, \tau_n)$, так что можно считать $s(t) \approx 0$ при $|t| \geq \tau_n$.

Тогда

$$y_1(t, Q) = \sqrt{s^2(t) + Q^2} \approx \text{const}, \quad |t| \geq \tau_n, \quad (4.60)$$

где $\text{const} = Q$.

Нетрудно показать, что при выполнении условия (4.60) независимо от формы сигнальной функции крутизна дискриминационной кривой $\Delta_\epsilon [y_1(t, Q)]$ равна удвоенной разности $y_1(0, Q) - y_1(\tau_n, Q)$ т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \Delta_\epsilon [y_1(t, Q)]|_{\epsilon=0} = 2 \sqrt{1 + Q^2} - Q.$$

Используя это свойство, легко получим следующие выражения для крутизны дискриминатора, номинальной крутизны и зависимости $K(Q)$:

$$K_x(Q) = \frac{2(\sqrt{1 + Q^2} - Q)}{y_1(t, Q)}; \quad K_{\text{нн}} = \frac{2}{s(t)} = \frac{2T}{\tau_n};$$

$$K(Q) = \frac{\tau_n}{T} \frac{\sqrt{1 + Q^2} - Q}{y(t, Q)}.$$

Для вычисления $y_1(t, Q)$ функцию $s(t)$ без существенной погрешности можно заменить эквивалентным по площади прямоугольником длительностью τ_n , тогда

$$y_1(t, Q) = Q + \frac{\tau_n}{T} (\sqrt{1+Q^2} - Q).$$

Отсюда

$$K(Q) = \frac{1}{1 + \frac{T}{\tau_n} \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2} - Q}}.$$

В случае больших помех

$$K(Q) = \frac{\tau_n}{2TQ^2}. \quad (4.61)$$

Таким образом, при больших помехах крутизна дискриминатора с АРУ изменяется обратно пропорционально отношению шум/сигнал по мощности.

Рассмотрим флюктуационные характеристики дискриминатора с АРУ. Для нахождения их согласно (4.53) требуется вычислить дисперсию разности интегралов z_1 и z_2 от централизованного случайного процесса $V^0(t)$. Нестационарность этого процесса существенно затрудняет нахождение интенсивности флюктуаций на выходе дискриминатора аналитическим путем. Однако в двух крайних случаях — при отсутствии помех и при больших помехах — это нетрудно сделать.

При отсутствии помех ввиду того, что приняты идеальные сглаживающие свойства АРУ, флюктуации на выходе дискриминатора пренебрежимо малы.

При больших помехах влиянием сигнала на величину дисперсии флюктуаций на выходе дискриминатора можно пренебречь, т. е. положить процесс $E(t)$ стационарным с параметрами, определяемыми формулами (4.56) при $\sigma_c = 0$. Тогда, учитывая (4.55), найдем, что дисперсия процесса $V^0(t)$ равна

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right).$$

Дисперсия разности интегралов z_1 и z_2 в формуле (4.51) согласно [62] равна

$$\sigma_z^2(\epsilon) = 2\sigma_V^2 \gamma_1^2 (1 - r_z), \quad r_z = \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_1^2} - 1, \quad (4.62)$$

где γ_1 и γ_2 — коэффициенты усреднения флюктуаций $V^0(t)$ при интегрировании их по интервалам длиной τ_n и $2\tau_n$ соответственно; r_z — коэффициент корреляции интегралов z_1 и z_2 . Значения $\gamma_{1,2}$ и r_z определяются произведением $\tau_n \Delta f_V$, где Δf_V — ширина спектра флюктуаций $V^0(t)$. В оптимальном приемнике $\tau_n \Delta f_V \approx 1$, тогда согласно [62] $\gamma_1^2 = 0,5$, $r_z = 0,15$. Отсюда

$$\sigma_z^2(\epsilon) = 0,85\sigma_V^2 \approx \sigma_V^2 \quad (4.63)$$

и среднеквадратическое значение флюктуаций на выходе дискриминатора, пересчитанных во флюктуации измеряемого параметра R , равно

$$\sigma_R(\epsilon) = \frac{\sigma_V}{K_{\text{дн}}} = \frac{\sqrt{4, \pi - 1} \tau_{\text{ш}}}{2T} = 0,26 \frac{\tau_{\text{ш}}}{T}. \quad (4.64)$$

Таким образом, получили, что при действии мощного шума интенсивность флюктуаций на выходе дискриминатора с АРУ стремится к постоянной величине, определяемой формулой (4.64).

Дискриминатор с логарифмическим приемником
Напряжение $V(t)$ в этом случае имеет вид

$$V(t) = \ln [1 + \beta E(t)].$$

Для нахождения дискриминационных характеристик согласно выражению (4.53) требуется знать математическое ожидание напряжения $V(t)$, т. е. величину

$$m_V(t) = M \{ \ln [1 + \beta E(t)] \}.$$

Поскольку при принятых допущениях $E(t)$ — релеевский случайный процесс с плотностью вероятностей

$$\omega(E, t) = \frac{E}{\sigma^2(t)} e^{-E^2/2\sigma^2(t)}, \quad (4.65)$$

то можно записать

$$m_V(t) = \int_0^{\infty} \frac{E}{\sigma^2(t)} \ln(1 + \beta E) e^{-E^2/2\sigma^2(t)} dE = \int_0^{\infty} \ln[1 + \beta y] e^{-y^2/2} y dy, \quad (4.66)$$

где

$$\sigma^2(t) = s^2(t) + Q^2, \quad B(t) = \beta \sigma(t).$$

Интеграл (4.66) не выражается в замкнутом виде в элементарных или ранее табулированных функциях. Величина этого интеграла, как показано в [64] путем вычисления на ЦВМ, лежит в пределах от $\ln(1 + B) \sqrt{\pi/2}$ до $\ln(1 + B)$ при $0 < B < \infty$, причем отношение значения интеграла к величине $\ln(1 + B)$ тем ближе к единице, чем больше B , и уже при $B=1$ составляет 1,1. Случай $B \geq 1$ в решаемой задаче следует считать типовым, так как он соответствует такой интенсивности сигнала и шума, когда наиболее вероятные значения их амплитуды выходят за пределы линейного участка амплитудной характеристики логарифмического приемника и начинает сказываться действие логарифмической нормировки. Поэтому без существенной погрешности можно положить

$$m_V(t) = \ln [1 + B(t)] = \ln [1 + \beta \sqrt{s^2(t) + Q^2}].$$

Отсюда

$$m_z(\epsilon) = \Delta_\epsilon [\ln(1 + \beta \sqrt{s^2(t) + Q^2})] = \Delta_\epsilon [y_2(t, Q)], \quad (4.67)$$

где

$$y_2(t, Q) = \ln(1 + \beta \sqrt{s^2(t) + Q^2}). \quad (4.68)$$

Как и в дискриминаторе с АРУ, с увеличением уровня шума дискриминационная кривая здесь имеет тенденцию к сужению. Действительно, согласно (4.67) дискриминационная кривая изменяется от

$$m_z(\epsilon) = \Delta_\epsilon [\ln(1 + \beta s(t))], \quad Q=0, \quad (4.69a)$$

до

$$m_z(\epsilon) \approx \frac{\beta}{2Q(1 + \beta Q)} \Delta_\epsilon [s^2(t)] \approx \frac{\Delta_\epsilon [s^2(t)]}{2Q^2}, \quad Q \gg 1. \quad (4.69b)$$

Длительность функции $\ln(1 + \beta s(t))$ (например, на уровне 0,5), очевидно, больше длительности функции $s^2(t)$. В результате размах линейного участка дискриминационной кривой при $Q=0$ будет больше, чем при $Q \gg 1$. Изменение формы дискриминационной кривой тем меньше, чем круче фронты сигнальной функции. При прямоугольной аппроксимации сигнальной функции $s(t)$ деформации кривой вообще не происходит.

Крутизну дискриминатора, как и в случае приемника с АРУ, можно найти независимо от формы сигнальной функции по формуле

$$K_d = 2 [y_2(0, Q) - y_2(\tau_n, Q)], \quad (4.70)$$

если принять, что $y_2(t, Q) = \text{const}$ при $|t| \geq \tau_n$ [при выполнении условия (4.60) по отношению к функции $y_2(t, Q)$]. Подставляя (4.68) в (4.70), получим

$$K_d = 2 [\ln(1 + \beta \sqrt{1 + Q^2}) - \ln(1 + \beta Q)]. \quad (4.71)$$

Отсюда

$$K_{дн} = 2 \ln(1 + \beta), \quad K(Q) = \frac{\ln(1 + \beta \sqrt{1 + Q^2}) - \ln(1 + \beta Q)}{\ln(1 + \beta)}, \quad (4.72)$$

$$K(Q) \approx \frac{\beta}{2Q(1 + \beta Q) \ln(1 + \beta)} \approx \frac{1}{2 \ln(1 + \beta) Q^2}, \quad Q \gg 1. \quad (4.73)$$

Видим, что при большом уровне шума крутизна дискриминатора с логарифмическим приемником так же, как крутизна дискриминатора с АРУ, изменяется обратно пропорционально отношению помеха/сигнал по мощности, причем коэффициент пропорциональности определяется относительным уровнем сигнала β .

Заметим, что формулы (4.71) и (4.72) в отличие от случая дискриминатора с АРУ справедливы при любых отношениях помеха/сигнал, если выполняется условие (4.60).

Флюктуационные характеристики дискриминатора с логарифмическим УПЧ ввиду нестационарности процесса $V^2(t)$ не представляется возможным аналитически в полной мере исследовать. Про-

ведем лишь оценку дисперсии флюктуаций на выходе дискриминатора при большом уровне шума, когда можно пренебречь сигнальной составляющей флюктуаций. Положив в формулах (4.65) и (4.66) $Q \gg 1$, дисперсию напряжения $V(t)$ можно выразить в виде

$$\sigma_V^2 = \int_0^{\infty} \ln^2(1 + \beta Q y) e^{-y^2/2y} dy - \left(\int_0^{\infty} \ln(1 + \beta Q y) e^{-y^2/2y} dy \right)^2. \quad (4.74)$$

Разность интегралов (4.74) как функция параметра βQ вычислена в [64]. Согласно [64] при изменении βQ в пределах от 3 до 1000 величина σ_V изменяется от $0,3 \ln(1 + \beta Q)$ до $0,1 \ln(1 + \beta Q)$, т. е. от 0,4 до 0,6. Практически в весьма широком диапазоне значений Q можно положить $\sigma_V = 0,5$. Зная σ_V , по аналогии с (4.62) — (4.64) найдем среднеквадратическое значение флюктуаций на выходе дискриминатора с логарифмическим приемником при большом отношении шум/сигнал

$$\sigma_R = \frac{\sigma_V}{K_{\text{дн}}} = \frac{1}{4 \ln(1 + \beta)}. \quad (4.75)$$

Итак, интенсивность флюктуаций на выходе дискриминатора с логарифмическим приемником при большом уровне шума остается почти неизменной и определяется формулой (4.75).

В заключение заметим, что полученные аналитические оценки характеристик дискриминатора автодальномера кроме того что они используются в дальнейшем представляют также и самостоятельный интерес.

7. Некоторые результаты исследования характеристик автодальномера методом цифрового моделирования

Алгоритм цифровой модели дискриминатора автодальномера с АРУ, описываемый формулами (4.43) — (4.46), был реализован на ЦВМ М-20. Дискриминационные и флюктуационные характеристики снимались путем нахождения статистического среднего и дисперсии случайной величины $x[n]$ для различных значений дискретного рассогласования r и для различных отношений помеха/сигнал Q одновременно.

При этом дискретные квадратурные компоненты шума $E_{\text{ш } 1,2}^0[n, m]$ для данного n в целях экономии вычислений оставались неизменными при различных значениях параметров r и Q . Замена дискретных реализаций $E_{\text{ш } 1,2}^0[n, m]$ статистически независимыми реализациями производилась только при переходе от n к $n + 1$.

Решение осуществлялось при следующих значениях параметров.

Дискриминатор принимался симметричным ($k_1=k_2=1$). Длительность полустробиов полагалась равной длительности импульса сигнала ($T_1=T_2=\tau_{\text{И}}$). Полустробиовы располагались вплотную ($t_1=-\tau_{\text{И}}$ и $t_2=0$). Отношение длительности строба к длительности импульса $T/\tau_{\text{И}}$ было равно либо 4, либо 2. Шаг дискретизации процессов внутри строба был принят равным $\Delta t = \tau_{\text{И}}/12$, что дало

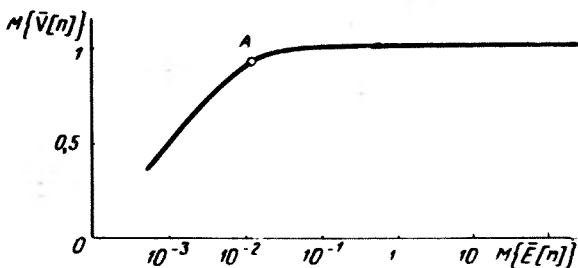


Рис. 4.17.

возможность весьма подробно воспроизводить реализации процессов. При этом нормированные значения параметров $\tau_{\text{И}}$; T ; $T_{1,2}$; $t_{1,2}$ были соответственно равны $m_{\text{И}}=12$, $T=24$ и $T=48$, $T_{1,2}=12$, $m_1=12$, $m_2=0$. Отношение времени корреляции сигнала к периоду повторения $T_c/T_{\text{И}}=25$.

Параметры АРУ были такими: $k_0=k_{\text{обр}}=1000$, отношение постоянной времени фильтра АРУ ко времени корреляции сигнала $\tau_A/T_c=1$. На рис. 4.17 показана амплитудная характеристика УПЧ с АРУ (зависимость среднего значения $M\{V[n]\}$ сигнала на выходе УПЧ от среднего значения $M\{E[n]\}$ сигнала на входе УПЧ), построенная по формуле [79]

$$M\{V[n]\} = \frac{k_0}{1 + k_{\text{осп}} M\{E[n]\}}$$

при $k_0=k_{\text{обр}}=1000$.

Известно, что эквивалентная постоянная времени замкнутой системы АРУ определяется выражением [79]

$$\tau_{\text{АЭ}} = \frac{\tau_A}{1 + k_{\text{осп}} M\{E[n]\}} \quad (4.76)$$

При моделировании величина σ_c выбиралась такой, чтобы $M\{E[n]\}=10^{-2}$ (точка А на рис. 4.17), что соответст-

вовало рабочему участку амплитудной характеристики приемника с АРУ и обеспечивало хорошее сглаживание амплитудных флюктуаций сигнала, так как эквивалентная постоянная времени АРУ в соответствии с (4.76) была в 10 раз меньше времени корреляции сигнала.

Заметим, что указанные значения параметров АРУ и уровня сигнала взяты не в связи с какой-либо конкретной схемой АРУ, а выбраны лишь с точки зрения обеспечения типичных свойств приемника с АРУ (вид амплитудной характеристики, степень сглаживания флюктуаций сигнала).

Цифровая модель дискриминатора с логарифмическим приемником получалась путем внесения изменений (4.48) в цифровую модель дискриминатора с АРУ. Моделирование производилось при различных значениях параметра β (относительный уровень сигнала).

При моделировании автодальномера на первом этапе для вычисления дискриминационных и флюктуационных кривых на ЦВМ М-20 для 6 значений отношения помеха/сигнал одновременно требовалось в среднем 15 мин машинного времени. При моделировании на втором этапе однократное воспроизведение процесса слежения в течение интервала времени, равного 20 постоянным времени следящей системы, для 6 значений отношения помеха/сигнал одновременно вместе со статистической обработкой результатов занимало всего лишь около 1 сек машинного времени.

Характеристики дискриминатора с АРУ

Исследование методом моделирования показало, что влияние шума на форму дискриминационных кривых незначительно. Нормированные дискриминационные характеристики $m_0(\epsilon, Q)$ при различных значениях отношения помеха/сигнал показаны на рис. 4.18,а.

Большое влияние оказывает шумовая помеха на крутизну дискриминатора с АРУ. На рис. 4.18,б показано отношение крутизны дискриминатора к номинальной крутизне в зависимости от Q (зависимость $K(Q)$ — изменение коэффициента усиления в петле обратной связи автодальномера под влиянием шума). Пунктиром даны аналитические оценки при большом уровне помех, вычисленные по формуле (4.61). Значения кривых $K(Q)$,

снятые на ЦВМ, были найдены путем усреднения по 200 реализациям. Для малых и средних значений отношения помеха/сигнал это количество реализаций обеспечивало достаточную точность. При больших Q для оценки дискриминационных кривых требуется весьма большое количество реализаций, так как постоянная состав-

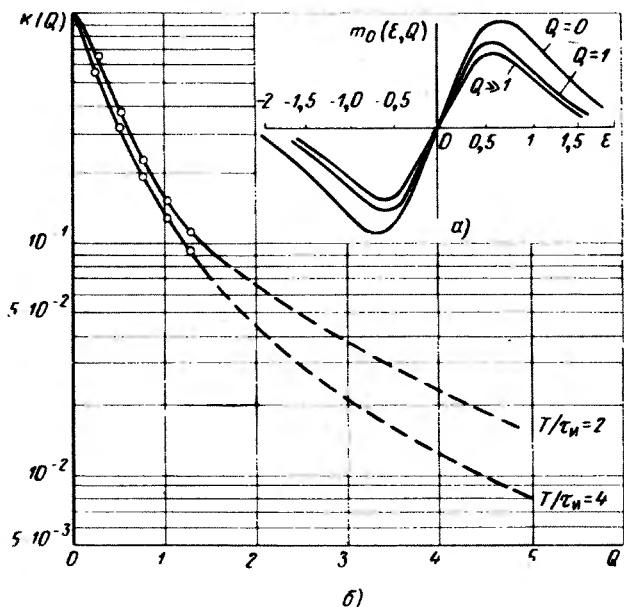


Рис. 4.18.

ляющая на выходе дискриминатора гораздо меньше флюктуационной составляющей. Поэтому кривые $K(Q)$ для больших Q были рассчитаны аналитически и на рис. 4.18 показаны пунктиром.

Интенсивность флюктуаций на выходе дискриминатора с АРУ, как показали расчеты, слабо зависит от рассогласования ϵ , т. е. малы параметрические флюктуации. Это является результатом нормирующего действия АРУ. Флюктуационные характеристики $\sigma_R(\epsilon, Q)$ для различных Q представлены на рис. 4.19.

На рис. 4.20 показаны зависимости величины $\sigma_R(0, Q)$. Пунктиром даны аналитические оценки при $Q \gg 1$ [фор-

мула (4.64)], которые, как видно из рисунка, довольно точно совпадают с предельными значениями σ_R , полученными при моделировании.

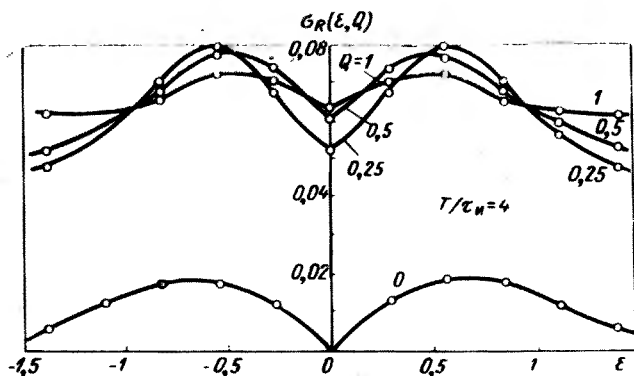


Рис. 4.19.

Из рис. 4.18 и 4.20 видно, что увеличение длительности строка приводит к уменьшению крутизны дискриминатора с АРУ при одновременном уменьшении σ_R — ин-

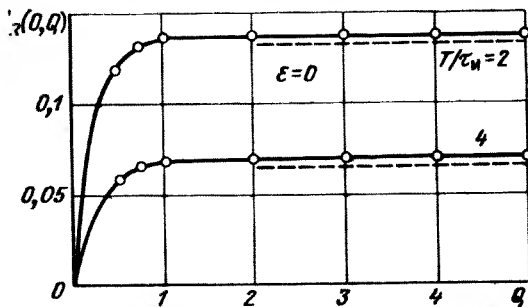


Рис. 4.20.

тенсивности флюктуаций на выходе дискриминатора, пересчитанных во флюктуации дальности, что является следствием нормирующего действия АРУ.

Характеристики дискриминатора с логарифмическим приемником

Моделирование показало, что дискриминационные кривые $m_0(\varepsilon, Q)$ (рис. 4.21,а) и зависимости $K(Q)$ (рис. 4.21,б) при различных β практически не отличаются от аналитических оценок этих характеристик [формулы (4.69), (4.72)].

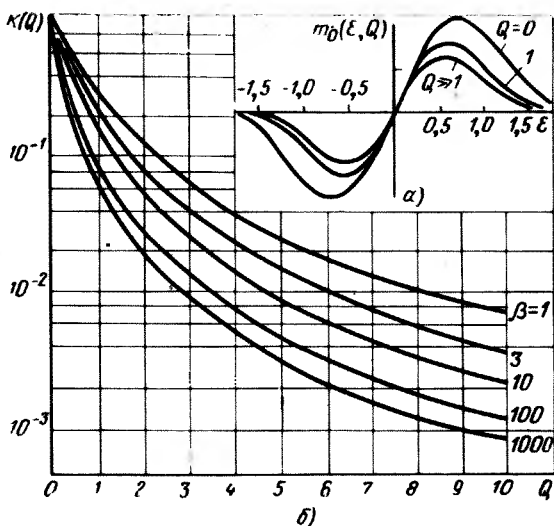


Рис. 4.21.

На рис. 4.22 представлены нормированные флюктуационные характеристики, полученные путем моделирования на ЦВМ при различных значениях параметра β . Из рисунка видно, что параметрические флюктуации, величина которых определяется разностью между максимальным значением функции $\sigma_R(\varepsilon)$ и ее значением при $\varepsilon=0$, составляют при $Q=0,5$ около 30%, а при $Q=1$ около 10% от общей интенсивности флюктуаций.

На рис. 4.23 показаны зависимости интенсивности флюктуаций при нулевом рассогласовании от отношения шум/сигнал при различных β . Пунктиром даны аналитические оценки [формула (4.75)]. Из рисунка видно, что

при больших β (больших уровнях сигнала) оценка оказывается заниженной. Расхождение обусловлено ошибкой в вычислении номинальной крутизны дискриминато-

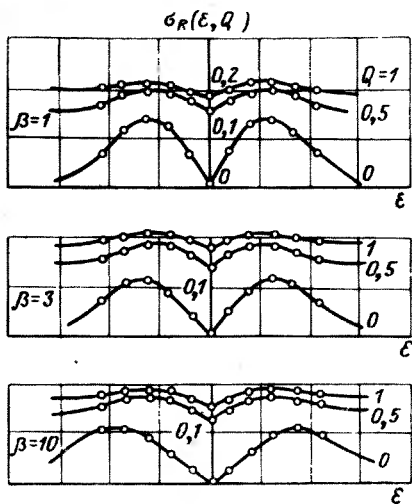


Рис. 4.22.

ра по формуле (4.72), которая выведена в предположении, что сигнальная функция полностью вмещается в интервал $(-\tau_{и}, \tau_{и})$. Однако при большом уровне сигнала

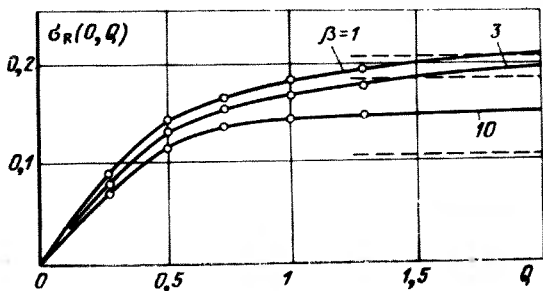


Рис. 4.23.

за счет ограничения в логарифмическом приемнике гауссов импульс искажается и становится шире, в результате он не вмещается в указанный интервал и возникает по-

грешность в вычислении крутизны дискриминатора по формуле (4.72) в сторону завышения значений.

Что касается предположения о возможности замены величины σ_z в формуле (4.75) на σ_v , то оно, как показали результаты цифрового моделирования, оказалось практически безошибочным. Таким образом, оценка (4.75) при использовании точного значения $K_{дн}$ является вполне удовлетворительной.

Сравнение характеристик дискриминатора с АРУ и логарифмическим приемником показывает, что они во многом сходны. Действительно, кривые $m_0(\epsilon, Q)$ на рис. 4.18,а и 4.21,а мало отличаются. Зависимости $K(Q)$ на рис. 4.18,б при $T/\tau_{н}=2$ и $T/\tau_{н}=4$ аналогичны зависимостям $K(Q)$ на рис. 4.21,б при $\beta=3$ и 10 соответственно. Почти при одинаковом значении Q происходит насыщение кривых на рис. 4.20 и 4.23. Примерно совпадают на этих рисунках значения величины $\sigma_R(0, Q)$ в области, где $Q>1$, для $T/\tau_{н}=2$, $T/\tau_{н}=4$ и $\beta=3$, $\beta=10$ соответственно.

Характеристики срыва слежения в автодальномере

Моделирование процессов слежения в автодальномере производилось в соответствии с алгоритмом (4.50), причем зависимости $m_0(\epsilon, Q)$ и $\sigma_R(\epsilon, Q)$ как функции ϵ при заданном Q вводились в ЦВМ в виде таблицы значений. При вводе табличных значений этих функций использовались результаты исследования характеристик дискриминатора. Значение $K(Q)$ при заданном Q вводилось в виде константы, взятой из графиков, представленных на рис. 4.18,б.

Считалось, что срыв слежения произошел в момент времени $t=T_{ср}$, если в этот момент ошибка рассогласования по абсолютной величине становилась больше ширины дискриминационной кривой, т. е. $\Delta R[n]>1$, и оставалась больше этого значения в течение постоянной времени следящей системы.

Постоянная времени корректирующей цепи сглаживающего фильтра дальномера выбиралась из условия $\sqrt{K_0 K_n} T_R = 1$, которое обеспечивает минимум эффективной полосы $\Delta F_{эф}$ замкнутой следящей системы автодальномера,

а следовательно, минимум флюктуационной ошибки [2].
При этом

$$\Delta F_{\text{эф}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |K_{\text{зам}}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2T_{\text{к}}},$$

где $K_{\text{зам}}(j\omega)$ — частотная характеристика замкнутой системы слежения (в линейном режиме).

Шаг моделирования $\Delta t_{\text{с}}$ выбирался равным $0,1 T_{\text{эф}} = 0,1/2\Delta F_{\text{эф}}$, где $T_{\text{эф}} = T_{\text{к}}$ — эффективная постоянная времени следящей системы дальномера.

Отношение периода повторения к постоянной времени следящей системы принималось равным 10^{-2} и 10^{-3} .

При моделировании задавался следующий закон изменения дальности:

$$R(t) = \frac{D_0}{D_{\text{н}}} + \frac{V_R}{D_{\text{н}}} t, \quad t < 0,$$

$$R(t) = \frac{D_0}{D_{\text{н}}} + \frac{V_R}{D_{\text{н}}} t + \frac{A_R}{D_{\text{н}}} t^2, \quad t \geq 0,$$

где D_0 — начальная дальность; V_R — радиальная скорость; A_R — радиальное ускорение; $D_{\text{н}} = c\tau_{\text{н}}/2$.

Предполагалось, что до момента времени $t=0$ переходные процессы в следящей системе закончились и шло точное сопровождение по дальности при отсутствии шумов. Для имитации этого соответствующим образом выбирались начальные условия в рекуррентных уравнениях (4.50). Начало отсчета времени при моделировании отождествлялось с моментом $t=0$. В этот момент в дополнение к линейному закону изменения дальности задавался скачок ускорения величиной A_R , что приводило к появлению динамической ошибки.

Можно показать, что величина динамической ошибки, возникающей в дальномере с двумя интеграторами за счет ускорения A_R , в установившемся режиме при отсутствии шума равна $\Delta R_{\text{д}} = 2A_R/D_{\text{н}}K_0k_{\text{н}}$.

В дальномере с минимальной эффективной полосой

$$\Delta R_{\text{д}} = 2A_R T_{\text{к}}^2 / D_{\text{н}} = 2A_R T_{\text{эф}}^2 / D_{\text{н}}.$$

При моделировании процесса слежения величина $A_R T_{\text{эф}}^2$ выбиралась так, чтобы динамическая ошибка

равнялась заданному значению (напомним, что ошибка ΔR_d численно равна рассогласованию по времени между центром отраженного сигнала и положением центра следящих полустрбов, выраженному в длительностях импульса).

В результате воздействия шума, как было показано выше, происходит значительное уменьшение коэффици-

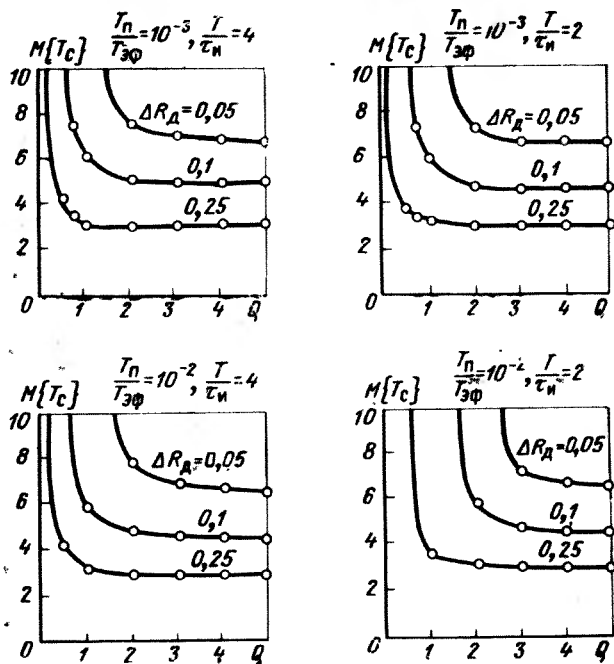


Рис. 4.24.

ента усиления в петле обратной связи автодальномера, что приводит к пропорциональному росту динамической ошибки. Вместе с этим появляются флюктуационные ошибки. При определенном значении отношения помеха/сигнал эти ошибки приводят к срыву слежения.

На рис. 4.24 даны зависимости среднего времени до срыва слежения от параметра Q при различных значениях ΔR_d , T/τ_n , $T_n/T_{эф}$. Среднее время до срыва слежения дано на рис. 4.24. в долях постоянной времени следящей системы.

Из рис. 4.24 видно, что срыв слежения носит пороговый характер. Начиная с некоторого значения отношения помеха/сигнал, увеличение интенсивности шума не приводит к уменьшению среднего времени до срыва.

Исследование показало, что основной причиной срыва слежения в рассматриваемом случае является динамическая ошибка, возрастающая вследствие значительного уменьшения крутизны дискриминатора при воздействии шума. Поэтому характеристики срыва слежения в автодальномере с логарифмическим приемником практически не отличаются от описанных выше характеристик срыва слежения в автодальномере с АРУ, если при прочих равных условиях совпадают значения $K(Q)$.

Заключение

Заканчивая рассмотрение примеров применения цифрового моделирования, необходимо сделать некоторые общие замечания.

Разработанные цифровые модели отличаются достаточной гибкостью. *Диапазон* изменения входных параметров *практически неограничен*. Так, например, положив в модели приемных устройств $\beta=0$ и $m_a \neq 0$, получим вариант, когда входное колебание имеет только амплитудную шумовую модуляцию. Такой случай не рассматривался, но легко может быть рассмотрен. Можно на этой же модели проанализировать влияние реакции видеофильтра на характеристики выходных флюктуаций приемника при произвольном отношении полос пропускания видеофильтра и радиофильтра (путем вариации параметра k_Φ). Нетрудно ввести нелинейное преобразование модулирующего шума для рассмотрения варианта, когда входное колебание модулировано либо по частоте, либо по амплитуде или одновременно по частоте и амплитуде так называемым «подрезанным» шумом [80]. Кроме интенсивности и законов распределения флюктуаций на выходе приемника, можно одновременно получить корреляционные характеристики флюктуаций и т. д.

Аналогично цифровая модель автодальномера при изменении только входных параметров позволяет получить в дополнение к имеющимся целый ряд других важных результатов. Например, положив $k_1 \neq k_2$ и $T_1 \neq T_2$, можно получить характеристики дискриминатора для

различных случаев его несимметрии; варьируя t_1 и t_2 , можно получить характеристики дискриминатора с несенными и перекрывающимися полустробами; нетрудно ввести нелинейность в приемнике, отличающуюся от логарифмической (например, ограничитель); легко получить характеристики срыва слежения при других законах движения цели и т. д.

Моделирование автодальномера производилось в два этапа. Это было целесообразно при принятой постановке задачи, так как кроме характеристик срыва слежения ставилась задача получения дискриминационных и флюктуационных характеристик дискриминатора, а также *статистического эквивалента* автодальномера [5]. Однако нетрудно построить цифровую модель автодальномера в целом; для этого нужно объединить модель дискриминатора с моделью следящей системы. При этом модель дискриминатора нужно несколько изменить путем введения задержки сигнального импульса, пропорциональной изменяющейся дальности. Цифровое моделирование автодальномера в целом в некоторых задачах более целесообразно, чем раздельное, например при исследовании влияния нестационарных помех, когда трудно найти статистический эквивалент.

Полученная выше статистически эквивалентная схема автодальномера справедлива при стационарных сигнале и шуме, а также когда отношение сигнал/помеха изменяется медленно. Эту схему можно использовать в моделях более сложных систем радиоавтоматики. Характеристики статистически эквивалентной схемы могут быть полезны как исходные данные для аналитических исследований процессов автосопровождения, например методом дифференциальных уравнений Фоккера—Планка [65].

Из сказанного следует, что цифровое моделирование, которое позволяет получить единую программу решения при сравнительно небольшом числе допущений, дает универсальное решение задачи. При аналитическом исследовании изменение условий задачи часто влечет за собой изменение метода решения, например при введении в линейную систему нелинейных звеньев.

Однако если аналитический метод позволяет находить достаточно универсальные и простые формулы, то при моделировании для получения каждого нового кон-

кретного результата для иной комбинации численных значений параметров требуется снова обращаться к ЦВМ и при необходимости производить перестройки в программе. В этом смысле цифровое моделирование имеет меньшую общность и гибкость, чем аналитический метод.

Возможность единым образом исследовать различные варианты задачи (изменяя лишь входные параметры и не изменяя модели по существу) сближает метод цифрового моделирования с физическим экспериментом и натурным испытанием, однако если в цифровой модели изменение входных параметров осуществляется весьма просто и возможно практически в неограниченном диапазоне, то в натурном испытании вариация входных параметров и характеристик часто сопряжена с большими трудностями. Основным же преимуществом цифрового моделирования перед натурным является то, что оно может быть применено *на более ранних стадиях разработки аппаратуры*, когда реальные макеты этой аппаратуры еще отсутствуют. Однако цифровое моделирование не исключает полностью экспериментальных исследований и натуральных испытаний, которые могут быть необходимы, например, в силу принятых при моделировании идеализаций.

Исследование рассмотренных выше задач методом цифрового моделирования требовало сравнительно небольших затрат машинного времени. Решение одного варианта задачи при исследовании радиоприемных устройств на ЦВМ М-20 требовало, как отмечалось выше, от 3 до 20 *мин* машинного времени и лишь оценка весьма малых вероятностей (порядка 10^{-3} — 10^{-4}) требовала нескольких часов машинного времени. Суммарное время, которое требовалось для вычисления совокупности всех кривых и гистограмм на рис. 4.4—4.13 составило около 15 часов.

Моделирование автодальномера требовало меньших затрат машинного времени. Суммарное время для получения совокупности кривых, представленных на рис. 4.18—4.24, составило около 5 *час*.

Уменьшению вычислительных затрат способствовало применение следующих основных приемов сокращенного моделирования.

При моделировании радиоприемных устройств ис-

пользовался метод огибающих и рекуррентные алгоритмы формирования реализаций случайных процессов. Кроме того, было рационально организовано вычисление искоемых статистических характеристик (§ 4.2, п. 3).

При моделировании автодалномера процесс прохождения шума и сигнала через линейную высокочастотную часть приемника не воспроизводился, так как заранее известны характеристики сигнала и шума на выходе линейной части. В других, более сложных случаях, например при исследовании влияния помех, рассмотренных в § 4.2, п. 1, это было бы невозможно и потребовалось бы моделировать процесс преобразования помех при прохождении их через линейную часть приемника.

Стробируемый приемник с АРУ является в данной задаче, строго говоря, нелинейной импульсно-непрерывной динамической системой со случайной формой импульса (случайная огибающая в стробе). Процессы в этой системе очень сложны для аналитического исследования и довольно сложны для цифрового моделирования, так как в общем случае требуется подробное воспроизведение процессов в контуре АРУ с учетом формы импульса на входе цепи обратной связи. Однако при принятых условиях система со случайной формой импульса ввиду кратковременности этого импульса эквивалентна с достаточной точностью более простой системе — системе с «мгновенными» импульсами (δ -функциями), имеющими случайную амплитуду, пропорциональную среднему значению огибающей смеси сигнала и шума на выходе УПЧ в пределах строба.

Упростило модель также применение метода огибающих и применение удобных аппроксимаций (аппроксимация регулировочной характеристики УПЧ линейной зависимостью, позволившая получить явное решение уравнения (4.41); экспоненциальная аппроксимация корреляционной функции амплитудных флюктуаций сигнала; аппроксимация частотной характеристики гауссовой кривой УПЧ), которые позволили применить для формирования реализаций коррелированных случайных процессов готовые и достаточно простые алгоритмы.

Эквивалентные упрощающие преобразования функциональных схем исследуемых радиосистем и применение удачных аппроксимаций вообще являются важными моментами в процессе цифрового моделирования.

Важным моментом при цифровом моделировании является также использование там, где это возможно, аналитических оценок, которые позволяют проконтролировать правильность моделирования, упростить и дополнить цифровые модели (§ 4.2, п. 4; § 4.3, п. 6). Последнее в какой-то мере компенсирует основной недостаток метода цифрового моделирования — невозможность получить общее решение. Используя аналитические оценки, можно сочетать в исследованиях общность аналитического метода с преимуществами цифрового моделирования при решении наиболее сложных задач.

Накопленный опыт применения ЦВМ для решения радиотехнических задач позволяет сделать следующие основные выводы.

Методом цифрового моделирования целесообразно решать многие сложные линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные задачи статистической радиотехники, решение которых другими методами либо недоступно, либо малоэффективно.

Цифровое моделирование является мощным методом научных исследований.

Литература

1. Акимов Л. П., Городецкий Ю. М., Шукурьян С. И. О моделировании гауссовых случайных последовательностей на цифровых вычислительных машинах. «Автоматика и телемеханика», 1969, № 1.
2. Бакут П. А., Большаков И. А. и др. Вопросы статистической теории радиолокации, т. II. Изд-во «Советское радио», 1964.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. т. II, Физматгиз, 1962.
4. Бобнев М. П. Генерирование случайных сигналов и измерение их параметров. Изд-во «Энергия», 1966.
5. Бобнев М. П., Кривицкий Б. Х., Ярлыков М. С. Комплексные системы радиоавтоматики. Изд-во «Советское радио», 1968.
6. Большаков И. А. Статистические проблемы выделений потока сигналов из шума. Изд-во «Советское радио», 1969.
7. Большаков И. А., Гуткин Л. С. и др. Математические основы современной радиоэлектроники. Изд-во «Советское радио», 1968.
8. Большаков И. А., Хомяков Э. Н. Некоторые задачи многомерной фильтрации процессов со стационарными производными. «Известия АН СССР», Техническая кибернетика, 1966, № 6.
9. Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов. Изд-во «Наука», 1964.
10. Бусленко Н. П., Голенко Д. И. и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) и его приложения. Физматгиз, 1962.
11. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) и его реализация в цифровых машинах. Физматгиз, 1961.
12. Быков В. В. Об одном методе моделирования на ЭЦВМ стационарного нормального шума. «Электросвязь», 1965, № 2.
13. Быков В. В., Малайчук В. П. О погрешности цифрового интегрирования стационарного случайного процесса. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 2.
14. Быков В. В., Малайчук В. П. К вопросу о вычислении энергетического спектра колебания, модулированного по частоте стационарным нормальным шумом. «Электросвязь», 1966, № 7.
15. Быков В. В., Малайчук В. П. Применение метода Монте-Карло для исследования реакции амплитудного приемника на колебания, модулированные флуктуациями по частоте. «Радиотехника и электроника», 1967, т. 12, № 8.
16. Быков В. В. Алгоритмы для цифрового моделирования некоторых типов стационарных нормальных случайных процессов. «Электросвязь», 1967, № 9.

17. Быков В. В. Цифровое моделирование процессов в линейных и нелинейных непрерывных системах. «Радиотехника», 1968, т. 23, № 5.

18. Быков Ю. М. О статистической точности восстанавливающих элементов при импульсной передаче случайных сигналов. «Известия АН СССР», Техническая кибернетика, 1965, № 1.

19. Быков Ю. М., Еникеев Ш. Г. и др. Вопросы применения ЦВМ при статистических исследованиях объектов управления. Приборостроение, средства автоматизации и системы управления. «Труды I конференции молодых ученых и специалистов». Изд-во «Наука», 1967.

20. Виленкин С. Я., Трахтенберг Э. А. Оценка точности выходного сигнала при моделировании динамических процессов на ЦВМ. «Автоматика и телемеханика», 1965, т. 26, № 12.

21. Винер Н. Кибернетика. Изд-во «Советское радио», 1958.

22. Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации. Пер. с англ. под ред. Г. С. Горелика. Изд-во «Советское радио», 1955.

23. Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. Изд-во «Наука», 1965.

24. Гоноровский С. И. Радиосигналы и переходные явления в радиоцепях. Связьиздат, 1954.

25. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

26. Гусев А. Г. Анализ погрешностей, возникающих в автоматической системе при реализации закона управления на цифровой вычислительной машине при гармоническом и случайном входных воздействиях. «Автоматика и телемеханика», 1968, № 9.

27. Гуткин Л. С., Лебедев В. Л., Сифоров В. И. Радиоприемные устройства. Изд-во «Советское радио», 1961.

28. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Изд-во иностранной литературы, 1960.

29. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. Пер. с англ. «Физматгиз», 1963.

30. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. Изд-во иностранной литературы, 1956.

31. Евтянов С. И. Переходные процессы в приемно-усилительных схемах. Связьиздат, 1948.

32. Каган Б. М. Применение цифровых вычислительных машин для решения научно-технических задач электромеханики и для автоматического управления. В сб. «Автоматизированный электропривод производственных механизмов», т. 1, 1965.

33. Каганова Н. А., Дубровин Е. П., Корниенко Н. Г. Опыт проведения расчетов на ЦВМ установившихся режимов энергосистем Украинской ССР. В сб. «Моделирование и автоматизация электрических систем». Киев. Изд-во «Наукова Думка», 1966.

34. Казамаров А. А., Палатник А. М., Роднянский Л. О. Динамика двумерных систем автоматического регулирования. Изд-во «Наука», 1967.

35. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы управления. Изд-во «Наука», 1966.

36. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Об оптимальной передаче непрерывного сигнала через импульсную цепь. «Автоматика и телемеханика», 1964, № 2.

37. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. Пер. с англ., под ред. А. Н. Колмогорова. Изд-во «Наука», 1966.

38. Китов А. И., Криницкий Н. А. Электронные цифровые машины и программирование, изд. 2. Физматгиз, 1961.

39. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. Изд-во «Наука», 1966.

40. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. Физматгиз, 1963.

41. Конторович М. И. Операционное исчисление и стационарные процессы в электрических цепях. Гостехиздат, 1955.

42. Корн Г. Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах. Изд-во «Мир», 1968.

43. Красовский А. А. О двухканальных системах автоматического регулирования с антисимметричными связями. «Автоматика и телемеханика», 1957, т. 18, № 2.

44. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Некоторые методы вычисления приближенных временных характеристик линейных систем автоматического регулирования. «Автоматика и телемеханика», 1953, т. 14, № 6.

45. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, 1962.

46. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Гостехиздат, 1950.

47. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, 1959.

48. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Физматгиз, 1963.

49. Крюкшенк Д. Дж. Методы анализа линейных и нелинейных систем регулирования, основанные на применении временных последовательностей и z-преобразований. Труды первого конгресса ИФАК. Изд-во АН СССР, 1961, т. 2.

50. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Изд-во «Советское радио», 1969, т. 1.

51. Левин Б. Р., Серов В. В. О распределении периодической функции случайной величины. «Радиотехника и электроника», 1964, т. 9, № 6.

52. Левин Л. Методы решения технических задач с использованием аналоговых вычислительных машин. Изд-во «Мир», 1966.

53. Лезин Ю. С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. Изд-во «Советское радио», 1969.

54. Лейтес Р. Д. Методика математического моделирования систем передачи речевого сигнала. «Электросвязь», 1963, № 8.

55. Лихарев В. А., Авдеев В. В. Методика моделирования задач статистической радиолокации на электронных цифровых вычислительных машинах. В сб. «Вопросы помехоустойчивости и разрешающей способности радиотехнических систем (телевидение и радиолокация)». Рязанский радиотехнический институт, вып. 10. Изд-во «Энергия», 1967.

56. Лэнигт Дж. Г., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Изд-во иностранной литературы, 1958.

57. Любимов Ю. К. Получение на ЦВМ дискретных значений стационарного случайного процесса в неравноотстоящих точках. «Автоматика и телемеханика», 1965, т. 26, № 12.
58. Ляшенко В. Ф. Программирование для цифровых вычислительных машин М-20, БЭСМ-3М, БЭСМ-4, М-220. Изд-во «Советское радио», 1967.
59. Малахов А. Н. Флюктуации в автоколебательских системах. Изд-во «Наука», 1968.
60. Меленъев П. В. Приближенные вычисления. Физматгиз, 1962.
61. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. т. 2, Изд-во «Советское радио», 1962.
62. Митяшев Б. Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. Изд-во «Советское радио», 1962.
63. Наумов Б. Н. Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1960.
64. Неронский Н. Б. Прохождение сигнала и шума через приемные устройства с нелинейной амплитудной характеристикой. «Известия вузов», Радиотехника, 1964, т. 7, № 6.
65. Обрезков Г. В., Первачев С. В. Срыв слежения в системе с астатизмом второго порядка. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 3.
66. Полляк Ю. Г. Моделирование последовательности неравноотстоящих по времени выборок из гауссова случайного процесса «Известия АН СССР» Техническая кибернетика, 1969, № 1.
67. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей, СМБ. Изд-во «Наука», 1967.
68. Пугачев В. С. Теория случайных функций. Физматгиз, 1962.
69. Раков Г. К. Выработка случайной коррелированной величины на быстродействующих электронных счетных машинах. Автоматическое управление и вычислительная техника (сборник трудов). Гостехиздат, 1958.
70. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. Физматгиз, 1963.
71. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Изд-во «Наука», 1966.
72. Сафронов Г. С. Корреляционные функции и спектральные плотности разности двух случайных функций, квантованных по времени. «Автоматика и телемеханика», 1962, № 6.
73. Седякин Н. М. Элементы теории случайных импульсных потоков. Изд-во «Советское радио», 1965.
74. Сергиевский Б. Д. Реакция приемника с квадратичным детектором на колебания, модулированные флюктуациями по фазе или частоте. «Радиотехника и электроника», 1962, т. 7, № 5.
75. Сергиевский Б. Д. Реакция амплитудного приемника на колебания, модулированные по фазе или частоте, при расстройке несущей частоты относительно приемника. «Радиотехника и электроника», 1963, т. 8, № 12.
76. Смирнов В. Н. Курс высшей математики. т. 2, Физматгиз, 1958.
77. Срагович В. Г. Моделирование некоторых классов случайных процессов. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1963, т. 3, № 3.

78. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1961.
79. Гартаковский Г. П. Динамика систем автоматической регуляции усиления. Госэнергоиздат, 1957.
80. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
81. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы управления. Машгиз, 1964.
82. Харкевич А. А. О теореме Котельникова. «Радиотехника», 1958, т. 13, № 8.
83. Харкевич А. А. Спектры и анализ. Физматгиз, 1962.
84. Хеллгрен Г. Вопросы теории моноимпульсной радиолокации «Зарубежная радиоэлектроника», 1962, № 12; 1963, № 1.
85. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
86. Цыпкин Я. З., Гольденберг Л. М. Построение переходного процесса в системах автоматического регулирования по характеристикам отдельных звеньев. Труды всесоюзного заочного энергетического института, вып. 7. «Электротехника», ГЭИ, 1957.
87. Шестов Н. С. Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех. Изд-во «Советское радио», 1967.
88. Ширман Я. Д., Голиков В. Н. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Советское радио», 1963.
89. Шишонко Н. А., Репкин В. Ф., Барвинский Л. А. Основы теории надежности. Изд-во «Советское радио», 1964.
90. Яглом А. М. Корреляционная теория процессов со стационарными n -ми приращениями. Математический сб. (новая серия), 1955, 37(79), № 1.
91. Яглом А. М. Эффективное решение линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром. Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, вып. 3.
92. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Изд-во «Наука», М., 1964.
93. Anderson W. H., Ball R. B., Voss I. R. A numerical method for solving differential on digital computers. IACM, 1960, vol. 7, January.
94. Boxer R., Thaler S. A simplified method of solving linear and nonlinear systems. Proc. IRE, 1956, vol. 44, № 1.
95. Davis M. C. On factoring of spectral matrix. IEEE Trans. on Automatic Control, 1963, AG-8, № 4.
96. Dujack R. L., Epstein D. I. Digital computer simulation of communication network. IRE Trans. Commun. syst. 1962, vol. 10, № 1.
97. Youla D. C. On the factorization of Rational matrices. IRE PGIT Trans. 1961, July.
98. Katzenelson J. AEDNET: A simulator for nonlinear network. Proc IEE, 1966, vol. 54, № 11.
99. Куо. Анализ цепей с помощью цифровых вычислительных машин. ТИИЭР, 1966, т. 54, № 6.
100. Cooley I. W., Tukey I. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Math. of Comput. 1965, vol. 19, April.

101. Levin M. I. Generation of a sampled Gaussian time series having a specified correlation function. Trans. IRE, 1960, vol. 60, № 5.
102. Madwed A. Number series method of solving linear and nonlinear system. Proc. IRE, 1956, vol. 44, № 1.
103. Neumann I. Various techniques in connection with random digits. NBS Appl. Math, 1951, ser. 12.
104. Ragazzini I. R., Bergen A. R. A mathematical technique for the analysis of linear systems. Proc. IRE, 1956, vol. 42, № 11.
105. Reabody P. R., Adorno D. S. Digital synthesis of correlated stationary noise. Comuns, Assoc. Comput. Mach. 1962, vol. 5, № 7.
106. Rohrer R. A. Fully automathed network design by digital computer: Preliminary considerations. Proc. of the IEEE, 1967, vol. 55, № 11.
107. Röhl. Computer—Technik für Trickfilme Kino—Techn. (B. R. D.), 1967, 21, № 12.
108. Sage A. P., Burt R. W. Optimum design and error analysis of digital integrators for discrete system simulation, 1965, AFIPS, conf. Proc. vol. 27, pt. 1.
109. Sage A. P., Smith S. L., Real-time digital simulation for systems control. Proc of the IEEE, 1966, vol. 54, № 12.
110. Truxal I. G. Numerical analysis for network design. IRE Trans. on Circuit. Theory, 1954, vol. CT-1.
111. Tustin A. A method of analysing the behavior systems in terms of time ser. JIEE, 1947, vol. 94, pt. II-A.

Предметный указатель

- Автодальномер 197, 277
— эквивалентная схема 288
автоматическая регулировка усиления (АРУ) 277, 280
Аппроксимация дискретная 166, 180
- Безынерционное нелинейное звено 8, 219
Белый шум непрерывный 63
— — дискретный 15, 27
- Взаимная корреляционная функция 128
Винеровский случайный процесс 145
Восстанавливающий элемент 42
- Гамма-функция 26
Гистограмма 261, 275
- Датчик случайных чисел 14
Детектирование 226
— амплитудное 226
— — квадратичное 252
— — линейное 229, 252
— фазовое 226
— частотное 226
— цифровое 233
Детерминированный процесс 15
Дискретизация 4, 13
Дискриминатор 226
Дисперсия 19, 25
D-преобразование (z -преобразование) 57, 171
- Идентификация передаточных функций 59, 180
— — матриц 129
Индекс частотной модуляции 257
Импульс селективирующий 277
Импульсная переходная характеристика 43, 64
- — — комплексного фильтра 206
Интеграл вероятностей 113
— Дюамеля 167
— свертки 167
— Фурье 166
Интегрирующее звено 141, 193
— — дискретное 194
— — непрерывное 194
Интерполирующий фильтр 42, 174
— — оптимальный 48
Интерполяция 42
- Квадратурная составляющая 120, 206
Классификация нелинейных систем 217
Когерентность 231, 233
Комплексная огибающая 203
Координатная функция 32, 34
Коэффициент амплитудной модуляции 251
— корреляции 54, 114
— укорочения 252
- Линейная система 164, 167
— — дискретная 57, 171
— — непрерывная 166
— — нестационарная 176
— — с переменными параметрами 176
— — с постоянными параметрами 166
— — узкополосная 202
— — физически осуществимая 167
- Линия задержки 171
- Марковская цепь 152
Марковский процесс 149
Матрица вероятностей перехода 152
— корреляционная 127
— передаточная 129, 207

- спектральная 128
- Метод дискретной аппроксимации 166, 180
 - канонических разложений 32
 - кусочной аппроксимации 22
 - Монте-Карло 253
 - Неймана 21
 - огибающих 204
 - прямоугольников 169
 - Симпсона 170
 - трапеций 170
 - факторизации 74
- Моделирование аналоговое 10
 - математическое 3
 - случайных векторов 27
 - случайных величин 18
 - случайных событий 23
 - цифровое 3, 6
- Модуляция 225
 - амплитудная 250
 - частотная 250
 - шумовая 250
- Моменты корреляционные 29
- Несущая частота 202
- Нормализация случайного процесса на выходе линейной системы 270
- Огибающая сигнала 202
 - комплексная 203
- Опорное колебание 229
- Оптимальный фильтр 252
- Ортогональность 66
- Отношение шум/сигнал 287
- Передаточная функция 8, 166
 - — дискретной системы 57
 - — комплексного фильтра 206
 - — непрерывной системы 166
 - — укороченная 213
- Плотность вероятностей 13
 - — перехода 149
- Погрешность дискретизации 42
 - интерполяции 43
- Полоса пропускания 213, 257
- Помеха шумовая 278
- Последовательность случайная 6
 - импульсов модулирования 173
- Постоянная составляющая 280
- Поток случайный 152
 - простейший 153
 - рекуррентный 53
- с ограниченным последствием 153
- Преобразование Лапласа 166
 - — дискретное (см. z-преобразование) 57, 82, 85, 179
 - — — двустороннее 82, 83
 - , обратное функции распределения 19
 - Фурье 166
- Приемник 250
 - АМ 252
 - логарифмический 277
 - оптимальный 250
 - ЧМ 252
- Производная случайного процесса 139
- Радиолокация 4
- Радиотехника 5
- Радиотехника статистическая 5
- Радиофизика 4
- Распределение вероятностей 13
 - арксинуса 20
 - Коши 20
 - логарифмически-нормальное 123
 - многомерное 12, 27
 - нормальное 19, 25
 - показательное 20
 - равномерное 18
 - Райса 25
 - релеевское 19
 - χ^2 26
- Рассогласование 280
- Реализация случайного процесса 12
- Рекуррентный алгоритм 16
 - уравнение 56
- Сигнал опорный 229
 - узкополосный 215
- Синтез радиосистем 250
 - случайных процессов 6
 - формирующих фильтров 59
- Система амплитудная импульсная 166
 - дискретная 14
 - замкнутая 165
 - импульсная 166
 - импульсно-непрерывная со случайной формой импульса 312
 - квазинепрерывная 166
 - линейная 166

- массового обслуживания 10, 152
- многоканальная 127
- многомерная 127
- нелинейная 217
- непрерывная 166
- нефункциональная 217
- радиоавтоматики 277
- разомкнутая 165
- следящая 288
- со многими импульсными элементами 201
- с переменными параметрами 176
- функциональная 164
- цифровая 14

Скважность 166

Случайный вектор 27

Случайное поле 154

— — изотропное 155

— — нормальное 156

— — однородное 155

— — стационарное 155

Случайный поток 152

— — простейший (пуассоновский) 153

— — рекуррентный 153

— — с ограниченным последствием 153

Случайный процесс винеровский 145

— — дискретный 6

— — многомерный 127

— — непосредственно заданный 13

— — непрерывный 6

— — нормальный 60

— — параметрически заданный 12

— — с рациональным спектром 75

— — со стационарными приращениями 139

Спектр модуляции 209

Спектральная плотность случайного поля 156

Среднее время до срыва 308

→ слежения 308

Стробирование 278

Схема восстановления 43

Теория случайных процессов 11

Усилитель промежуточной частоты (УПЧ) 278

Условия начальные 56

Уравнение дифференциальное 113

— разностное 179

— рекуррентное 56

Факторизация спектральных матриц 130

— — функций 75

Фильтр интерполирующий 42

— согласованный 168

— оптимальный 168

— оптимальный интерполирующий 42

— формирующий 59

Флюктуации параметрические 302

Функция корреляционная пространственно-временная 156

— дискретная 16

— непрерывная 16

— передаточная дискретной системы 57

— передаточная непрерывной системы 166

— плотности 13

— с ограниченным спектром 49

— спектральной плотности поля 156

— структурная 143

Характеристика дискриминационная 281

— амплитудная 277

— импульсная переходная 43, 64

— срыва слежения 306

— флюктуационная 281

— частотная 236

— частотная оптимальная 48

Цифровое детектирование 233

— моделирование 3, 6

z-преобразование 11, 57, 180

Частота дискретизации 46, 52

— несущая 251

— промежуточная 202

Часть непрерывная приведенная 174

Шаг дискретизации 13, 41

Элемент импульсный 173

— — простейший 173

— запаздывания 220

Эллиптический интеграл 121

Энергия сигнала 287

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение	6

Глава первая

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИОСИГНАЛОВ И РАДИОПОМЕХ

1.1. Постановка задачи	12
1.2. Моделирование непрерывных детерминированных процессов	15
1.3. Моделирование функций, зависящих от случайных параметров и случайных процессов	17
1.4. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения	18
1. Метод нелинейного преобразования, обратного функции распределения	19
2. Метод Неймана	21
3. Метод кусочной аппроксимации	22
4. Некоторые специальные методы моделирования случайных величин	24
5. Заключительные замечания	26
1.5. Моделирование случайных векторов по заданным многомерным распределениям	27
1. Метод условных распределений	27
2. Метод Неймана	28
1.6. Моделирование случайных векторов в рамках корреляционной теории	29
1. Метод линейного преобразования	30
2. Метод канонических разложений	32
3. Метод разложения в ряд Фурье	37
1.7. Погрешность восстановления непрерывных сигналов по дискретным данным	41
1. Основные соотношения	44
2. Оптимальные интерполирующие фильтры	48
3. Частные случаи	49

Глава вторая

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТИПОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Постановка задачи	55
2.2. Моделирование стационарных случайных процессов методом скользящего суммирования	60
1. Получение весовых коэффициентов путем решения нелинейной алгебраической системы уравнений	62
2. Получение весовых коэффициентов путем разложения функции спектральной плотности в ряд Фурье	63

3.	Получение весовых коэффициентов методом факторизации	74
4.	Некоторые специальные способы получения весовых коэффициентов	79
2.3.	Моделирование стационарных случайных процессов с помощью рекуррентных разностных уравнений	80
1.	Получение параметров рекуррентных алгоритмов методом факторизации	81
2.	Получение параметров рекуррентных алгоритмов методом дискретизации непрерывных формирующих фильтров	89
2.4.	Моделирование стационарных нормальных случайных процессов в неравноотстоящих точках	96
2.5.	Сравнительная характеристика методов моделирования стационарных нормальных случайных процессов	97
2.6.	Алгоритмы для цифрового моделирования стационарных нормальных случайных процессов с часто встречающимися типами корреляционных функций	99
2.7.	Моделирование ненормальных стационарных случайных процессов	111
2.8.	Моделирование стационарных случайных процессов с распространенными одномерными законами распределения	117
1.	Случайный процесс с равномерным распределением	117
2.	Релеевский случайный процесс	119
3.	Случайный процесс с показательным распределением	122
4.	Логарифмически-нормальный случайный процесс	123
5.	Случайный процесс с одномерным распределением по закону арксинуса	125
2.9.	Моделирование многомерных стационарных нормальных случайных процессов	127
2.10.	Моделирование нестационарных нормальных случайных процессов со стационарными приращениями	138
2.11.	Моделирование марковских случайных процессов	149
2.12.	Моделирование случайных потоков	152
2.13.	Моделирование случайных полей	154

Глава третья

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

3.1.	Введение	164
3.2.	Цифровые модели непрерывных линейных динамических систем, основанные на дискретной свертке	166
1.	Дискретизация с использованием формул численного интегрирования	169
2.	Дискретизация по методу замены непрерывных систем эквивалентными импульсными системами	173
3.	Применение к системам с переменными параметрами	176
4.	Заключительные замечания	178

3.3. Моделирование линейных непрерывных динамических систем с помощью рекуррентных разностных уравнений	179
1. Метод z -преобразования	181
2. Метод Цыпкина—Гольденберга [86]	184
3. Метод Рагазини—Бергена	186
4. Метод, предложенный автором [17]	188
5. Метод Тастина [111]	194
6. Метод Мадведа—Траксела [102, 110]	195
7. Метод Боксера—Талера [94]	195
8. Примеры	197
9. Сравнительная характеристика методов дискретной аппроксимации	199
3.4. Моделирование узкополосных линейных систем	202
1. Метод огибающих. Комплексные линейные фильтры	204
2. Цифровые модели узкополосных линейных систем, основанные на дискретной комплексной свертке	208
3. Моделирование узкополосных линейных систем с помощью комплексных рекуррентных разностных уравнений	212
3.5. Моделирование нелинейных систем	217
1. Классификация нелинейных систем	217
2. Моделирование безынерционных нелинейных систем	219
3. Моделирование инерционных нелинейных разомкнутых функциональных систем	219
4. Моделирование инерционных нелинейных функциональных замкнутых систем	221
5. Моделирование инерционных нелинейных нефункциональных систем	223
3.6. Моделирование типовых нелинейных преобразований сигналов и помех в радиосистемах	225
1. Модуляция	225
2. Преобразование частоты	225
3. Детектирование	226
3.7. Оценка погрешности дискретной аппроксимации непрерывных систем	234

Глава четвертая

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОТЕХНИКИ

4.1. Предварительные замечания	246
4.2. Исследование воздействия колебаний с шумовой модуляцией на радиоприемные устройства	250
1. Постановка задачи	250
2. Цифровая модель приемника	253
3. Организация расчетов на ЦВМ для вычисления статистических характеристик	260
4. Некоторые аналитические оценки для контроля достоверности и точности результатов моделирования	262
5. Выбор исходных данных и результаты цифрового моделирования	266
	325

4.3. Применение цифрового моделирования для исследования вопросов радиолокационного сопровождения на фоне шумов	277
1. Постановка задачи	277
2. Цифровая модель дискриминатора автодальномера с АРУ	280
3. Цифровая модель дискриминатора автодальномера с логарифмическим прismsником	287
4. Эквивалентная функциональная схема автодальномера как следящей системы	288
5. Цифровая модель следящей системы автодальномера	290
6. Аналитические оценки влияния шума на характеристики автодальномера	292
7. Некоторые результаты исследования характеристик автодальномера методом цифрового моделирования	299
Заключение	309
Литература	314
Предметный указатель	320

Виталий Васильевич Быков

**ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ
РАДИОТЕХНИКЕ**

Редактор **Е. В. Вязова**
Художественный редактор **З. Е. Вендрова**
Художник **Б. К. Николаев**
Технический редактор **А. А. Белоус**
Корректоры **Е. П. Озерецкая,**
Л. А. Максимова

Сдано в набор 16/III-1971 г.

Подписано в печать 1/VII-1971 г.

Т-10542

Формат 84×108/32

Бумага типографская № 2

Объем 17,22 усл. п. л. 17,710 уч. изд. л. Тираж 9 500 экз.

Зак. 160

Издательство „Советское радио“, Москва, Главпочтамт,
п/я 693. Цена 1 р. 01 к.

Московская типография № 10 Главполиграфпрома Комитета
по печати при Совете Министров СССР Москва, Шлюзовая
наб., д. 10

Готовятся к выходу в свет в издательстве «СОВЕТСКОЕ РАДИО»

Головкин Б. А. Машинное распознавание и линейное программирование.

Приводятся различные методы обучения, самообучения и принятия решения при машинном распознавании объектов (образов) из классов с пересекающимися и непересекающимися собственными областями. Правила классификации вырабатываются в результате решения экстремальных задач по соответствующим алгоритмам, которые излагаются с учетом их машинной реализации. Основное внимание уделяется рассмотрению естественных связей между задачами распознавания и линейного программирования. Показывается, что многие задачи распознавания сводятся к задачам линейного программирования и могут быть решены с помощью соответствующих типовых программ для задач линейного программирования, реализованных на различных серийных ЦВМ.

Книга предназначена для инженеров и научных работников, специализирующихся в области вычислительной техники и автоматического управления, для преподавателей и студентов.

Обнаружение и исправление ошибок в дискретных устройствах. Под ред. В. С. Толстякова.

Рассматриваются различные методы введения избыточности с целью повышения надежности дискретных устройств обработки информации. Основное внимание уделяется вопросам оптимизации параметров резервированных дискретных устройств, разработке эффективных методов использования корректирующих кодов, синтезу устройств повышенной надежности, проведенному с учетом статистики ошибок. Рассматриваются методы коррекции отказов и ошибок, основанные на использовании функциональных особенностей различных устройств. Текст иллюстрируется примерами. Приводится ряд конкретных схем, которые могут быть использованы во вновь проектируемой аппаратуре.

Книга рассчитана на инженеров, научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по технической кибернетике.

Заказы на указанные книги направляйте в местные магазины или магазины «Книга — почтой»: Москва, К-50, ул. Медведова 1, отдел «Книга — почтой»; Ленинград Л-216, пр. Героев, 26, магазин № 63 «Родина».

