Непрерывное вейвлет-преобразование функции $x(t)$

$$\gamma(\tau, s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-\tau}{s} \right) dt$$
,

где $\psi(t)$ – материнский вейвлет, τ – временной сдвиг, s – параметр масштаба.

Обратное вейвлет-преобразование

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau, s) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right) d\tau \frac{ds}{|s|^2}$$

где C_ψ – постоянная допустимости:

$$C_\psi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\zeta)|^2}{|\zeta|} d\zeta$$ $\Psi(\varsigma)$ – преобразование Фурье от $\Psi(t)$.

Материнский вейвлет связан с дочерним вейвлетом соотношением:

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right).$$

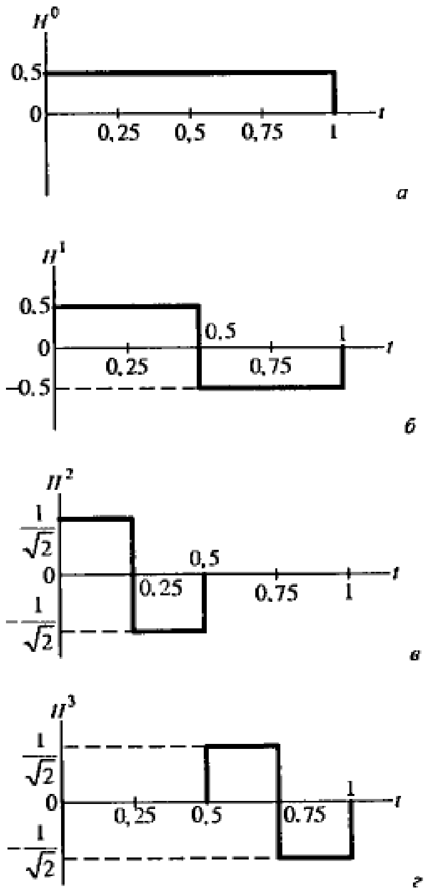

Рис. 30.1. Ступенчатые функции Хаара

$$H_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdot & & & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$$A_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \end{bmatrix}$$

$$D_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная плотность $\psi(\omega)$
Вещественные непрерывные базисы		
Гауссовы: – первого порядка, или WAVE-вейвлет,	$-t\exp(-t^2/2)$	$(i\omega)\sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2)$
– второго порядка, или MHAT-вейвлет «мексиканская шляпа» – mexican hat),	$(1-t^2)\exp(-t^2/2)$	$(i\omega)^2\sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2)$
– n-го порядка,	$(-1)^n \dfrac{d^n}{dt^n}\left[\exp(-t^2/2)\right]$	$(-1)^n(i\omega)^n\sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2)$
DOG – difference of gaussians	$e^{-t^2 2}-0{,}5e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi}\left(e^{-\omega^2/2}-e^{-2\omega^2}\right)$
LP-Littlewood & Paley	$(\pi t)^{-1}(\sin 2\pi t-\sin\pi t)$	$\begin{cases}(2\pi)^{-1/2}, \pi\le\lvert t\rvert\le 2\pi,\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$
Вещественные дискретные		
HAAR-вейвлет	$\ge\begin{cases}1, & 0\le t\le 1/2,\\ -1, & 1/2\le t\le 1,\\ 0, & t<0,\ t>0.\end{cases}$	$ie^{i\omega/2}\dfrac{\sin^2\omega/4}{\omega/4}$
FHAT-вейвлет, или «французская шляпа» (French hat – похож на цилиндр)	$\ge\begin{cases}1, & \lvert t\rvert\le 1/3,\\ -1/2, & 1/3\le\lvert t\rvert\le 1,\\ 0, & \lvert t\rvert>1.\end{cases}$	$\dfrac{4}{3}\dfrac{\sin^3\omega/3}{\omega/3}$
Комплексные		
Морле (Morlet)	$e^{i\omega_0 t}e^{-t^2/2}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi}\,e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$
Пауля (Paul) (чем больше n, тем больше нулевых моментов имеет вейвлет)	$\Gamma(n+1)\dfrac{i^n}{(1-n)^{n+1}}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi}\,(\omega)^n e^{-\omega}$