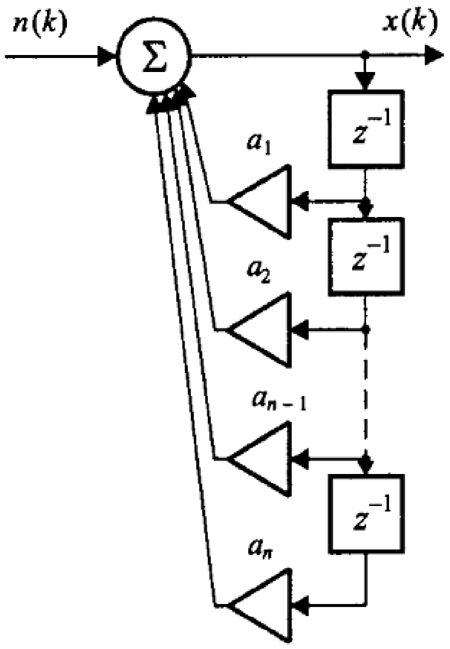
Параметрические методы спектрального оценивания

Авторегрессионная (AR) модель случайного процесса $x(k)$:

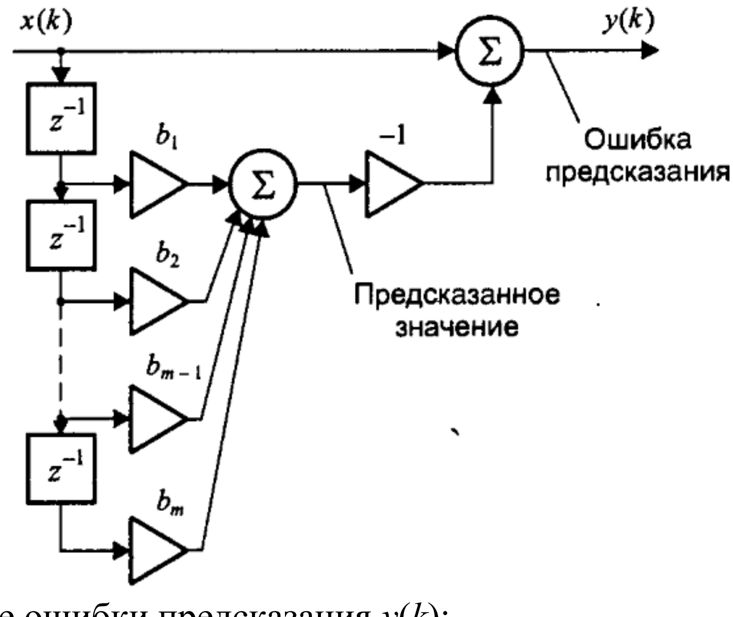


Коррелированный процесс $x(k)$ формируется на выходе «чисто рекурсивного» фильтра при подаче на его вход отсчетов белого гауссовского шума $n(k)$.
Помимо авторегрессионной существуют и другие модели формирования сигнала путем пропускания белого шума через формирующий фильтр. Так, в MA-модели (Moving Average, «скользящее среднее») для этого используется нерекурсивный фильтр, а в ARMA-модели (Autoregressive Moving Average) — фильтр общего вида, содержащий рекурсивную и нерекурсивную ветви.

СПМ авторегрессионного случайного процесса:

$$W(\omega) = \frac{\sigma_n^2}{f_д} \frac{1}{\left|1 - a_1 e^{-j\omega T} - a_2 e^{-j2\omega T} - \ldots - a_N e^{-jN\omega T}\right|^2}.$$

Требуется оценить порядок модели N, коэффициенты a_i и мощность белого шума σ. Минимизируется ошибка линейного предсказания.



Z-преобразование ошибки предсказания $y(k)$:

$$Y(z) = N(z)\frac{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \ldots - b_N z^{-N}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \ldots - a_N z^{-N}}.$$

Эквивалентное выражение: $Y(z) = N(z)\ (1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + ...)$,

откуда $$y(k) = n(k) + h_1 n(k-1) + h_2 n(k-2) + ...$$

Дисперсия ошибки предсказания $\sigma_y{}^2 = \sigma_n{}^2\ (1 + h_1{}^2 + h_2{}^2 + ...)$.

Минимум дисперсии ошибки предсказания достигается при всех $h_i = 0$.

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2(k)} = \overline{x^2(k)} - 2\sum_{m=1}^{N} b_m \overline{x(k)x(k-m)} + \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} b_m b_n \overline{x(k-m)x(k-n)}.$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 - 2\sum_{m=1}^{N} b_m R_x(m) + \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} b_m b_n R_x(m-n).$$

Дифференцируя и приравнивая нулю производную получим систему ур-ний:

$$\frac{\partial \sigma_y^2}{\partial b_k} = -2R_x(k) + 2\sum_{m=1}^{N} b_m R_x(m-k)$$

$$\sum_{m=1}^{N} b_m R_x(m-k) = R_x(k), \quad k = 1, 2, ..., N.$$

В матричном виде: $\mathbf{R}_x\, \mathbf{b} = \mathbf{p}$, – уравнение Юла–Уокера (Yule–Walker),

где $\mathbf{p} = [R_x(1), R_x(2), ... R_x(N)]^T$, откуда $\mathbf{b} = \mathbf{R}_x^{-1}\, \mathbf{p}$,

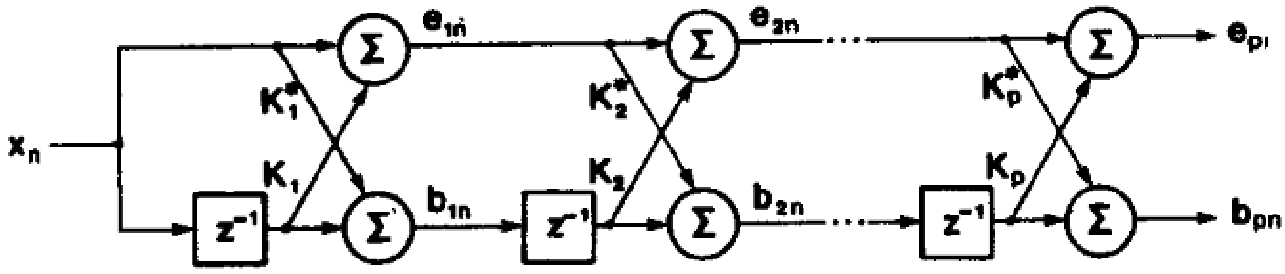
Минимальная дисперсия ошибки предсказания $(\sigma_y^2)_{\min} = \sigma_x^2 - \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{R}_x^{-1}\, \mathbf{p}$.

При неизвестных $\mathbf{R}_x$ и $\mathbf{p}$ используют их оценки.

Рекуррентный алгоритм решения уравнений Юла–Уокера – алгоритм Левинсона – Дербина (Levinson–Durbin).

Модель процесса скользящего среднего (СС): $x_k = \sum_{i=0}^{M} b_i n_{k-i}$

Модель авторегрессии и скользящего среднего (АРСС): $x_k = \sum_{i=0}^{N} b_i n_{k-i} - \sum_{i=1}^{M} a_i x_{k-i}$



Решетчатый фильтр для оценки ошибок предсказания вперед e_{pn} и назад b_{pn}

Таблица. Характеристики авторегрессионных методов спектрального анализа

Метод	Достоинства	Недостатки
Юла—Уокера	Хорошие результаты при анализе длинных сигналов. Гарантированная стабильность рассчитанного формирующего фильтра	Плохие результаты при анализе коротких сигналов. При анализе суммы синусоид с шумом получаются смещенные спектральные пики
Берга	Высокая разрешающая способность при анализе коротких сигналов. Гарантированная стабильность рассчитанного формирующего фильтра. Минимизирует ошибки предсказания веред и назад	Положения спектральных пиков сильно зависят от начальных фаз синусоид. При большом порядке модели может наблюдаться расщепление спектральных пиков. При анализе суммы синусоид с шумом получаются смещенные спектральные пики
Ковариа-ционный	Большая (по сравнению с методом Юла—Уокера) разрешающая способность при анализе коротких сигналов. Возможность оценки частот для сигнала, представляющего собой сумму «чистых» синусоид	Рассчитанный формирующий фильтр может оказаться нестабильным. При анализе суммы синусоид с шумом получаются смещенные спектральные пики
Модифици-рованный ковариа-ционный	Высокая разрешающая способность при анализе коротких сигналов. Возможность оценки частот для сигнала, представляющего собой сумму «чистых» синусоид Отсутствие расщепления спектральных пиков. Минимизирует ошибки предсказания веред и назад	Положения спектральных пиков в некоторой степени зависят от начальных фаз синусоид. Рассчитанный формирующий фильтр может оказаться нестабильным. При анализе суммы синусоид с шумом получаются слегка смещенные спектральные пики

Оценка псевдоспектра (частоты и количества гармоник в сигнале)

Метод MUSIC (MUltiple Signal Classification)

Наблюдаемый сигнал – сумма гармоник с белым шумом:

$$x(k) = n(k) + \sum_{m=1}^{M} A_m \exp(j\omega_m kT + j\varphi_m).$$

Его автокорреляционная функция

$$R_x(k) = \sigma_n^2 x_0(k) + \sum_{m=1}^{M} A_m^2 \exp(-j\omega_m kT).$$

$x_0(k) = 1$ при $k = 0$ и $x_0(k) = 0$ при $k \neq 0$ – единичная функция. Из отсчетов $R_x(k)$ формируется корреляционная матрица $\mathbf{R}_x$ размером N × N, N > M. Находятся собственные числа и собственные вектора матрицы $\mathbf{R}_x$.

> Собственное число и вектор матрицы **R** -- это такой вектор **x** и число λ, для которых выполняется $\mathbf{Rx} = \lambda\mathbf{x}$ (причем $\mathbf{x} \neq 0$, $\lambda \neq 0$). Собственные числа являются корнями характеристического уравнения
>
> $\det(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, где **I** – единичная матрица.

Наименьшее собственное число равно σ_n^2 и имеет кратность N–M. Остальные наибольшие M собственных чисел зависят от амплитуд и частот комплексных экспонент.

M собственных вектора - линейные комбинации комплексных экспонент

Псевдоспектр метода MUSIC рассчитывается по формуле

$$W(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=M+1}^{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} v_k(n) e^{-j\omega nT} \right|^2}.$$

vk(n) – n-й элемент k-го собственного вектора матрицы $\mathbf{R}_x$

Частоты гармоник находятся из уравнения

$$\sum_{k=M+1}^{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} v_k(n) e^{-j\omega nT} \right|^2 = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=M+1}^{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v_k(n) v_k^*(l) e^{-j\omega(n-l)T} = 0.$$

Частотами грамоник являются аргументы корней этого уравнения, лежащие на единичной окружности или близкие к этой окружности (при использовании оценок корреляционной матрицы).

Метод EV (EigenVectors – собственных векторов)

Псевдоспектр рассчитывается по формуле

$$W(\omega) = \frac{1}{\sum\limits_{k=M+1}^{N} \frac{1}{\lambda_k} \left| \sum\limits_{n=0}^{N-1} v_k(n) e^{-j\omega nT} \right|^2},$$

Частоты комплексных экспонент находятся из уравнения

$$\sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{\lambda_k} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v_k(n) v_k^*(l) e^{-j\omega(n-l)T} = 0.$$

где λ_k – собственное число соответствующее собственному вектору $\boldsymbol{v}_k$.

Функции спектрального анализа Matlab

specgram — вычисление мгновенного спектра сигнала;

spectrogram(x,window,noverlap,nfft,fs) – новая реализаця specgram

periodogram — вычисление спектральной плотности мощности одной реализации случайного сигнала;

[Pxx, f] = periodogram(x, window, Nfft, Fs, 'range')

pwelch — оценка спектральной плотности мощности случайного процесса методом усреднения модифицированных периодограмм.

[Pxx, f] = pwelch(x, Nwin, Noverlap, Nfft, Fs, 'range')

Функция psdplot предназначена для построения графика спектральной плотности мощности: psdplot(Pxx, f, 'units', 'yscale', 'title')

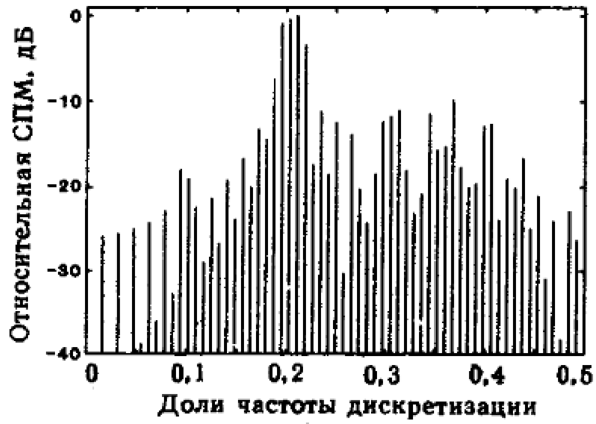
Название метода	Функция расчета коэффициентов модели	Функция спектрального анализа
Ковариационный	arcov	pcov
Модифицированный ковариационный	armcov	pmcov
Берга	arburg	pburg
Авторегрессионный Юла—Уокера	aryule	pyulear

pmusic – расчет псевдоспектра путем анализа собственных чисел и собственных векторов корреляционной матрицы сигнала (метод MUSIC):
[s, f, v, e] = pmusic(x, p, Nfft, Fs, Nwin, Noverlap, 'range').

peig – расчет псевдоспектра путем анализа собственных чисел и собственных векторов (метод EV)
[s, f, v, e] = peig(x, p, Nfft, Fs, Nwin, Noverlap, 'range').

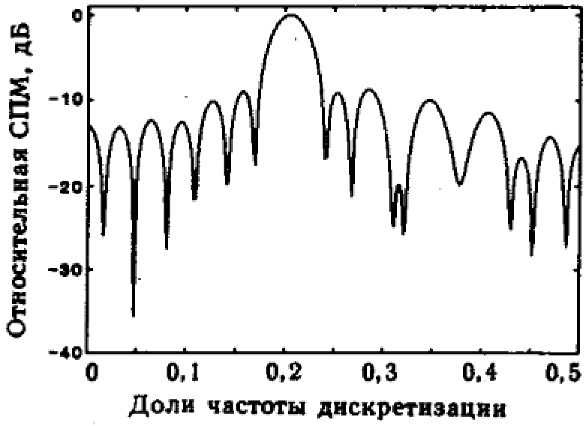
Спектральные оценки для одной и той же 64-точечной последовательности, полученные с помощью различных методов:

(a)



(b)

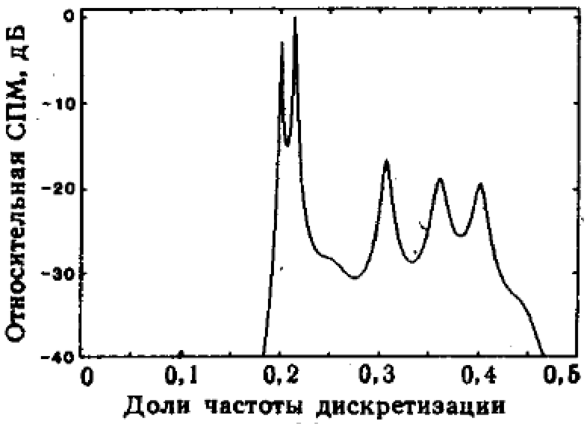
(a) истинная СПМ; (b) СПМ на основе периодограммы (БПФ); число отсчетов, удвоено за счет введения дополнительных нулевых отсчетов;



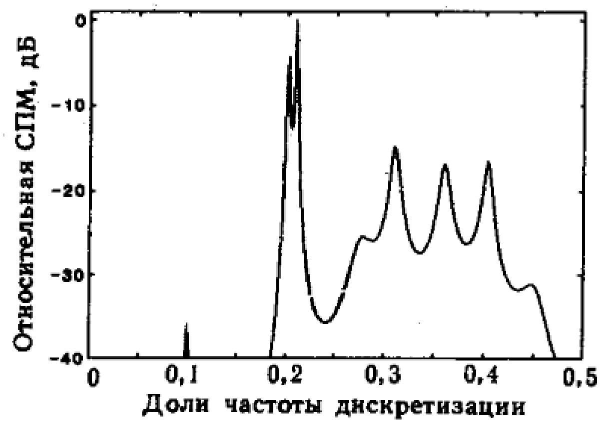
(c)

(d)

(c) СПМ Блэкмана — Тьюки; (d) АР-оценка СПМ на основе подхода Юла — Уокера;

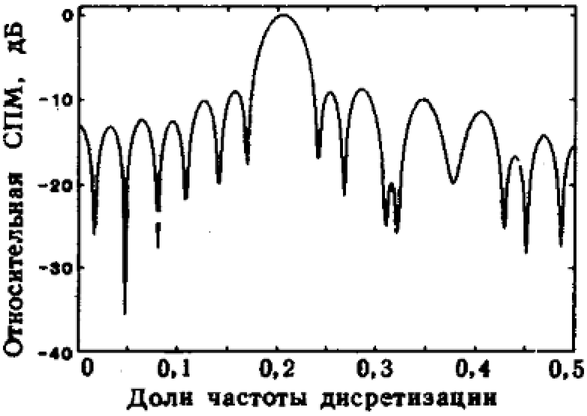


(e)

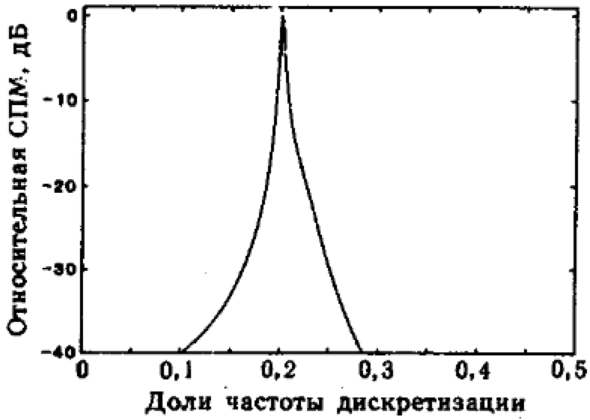


(f)

(e) АР-оценка СПМ с помощью алгоритма Берга; (f) АР-оценка СПМ по методу наименьших квадратов или алгоритма предсказания вперед и назад;

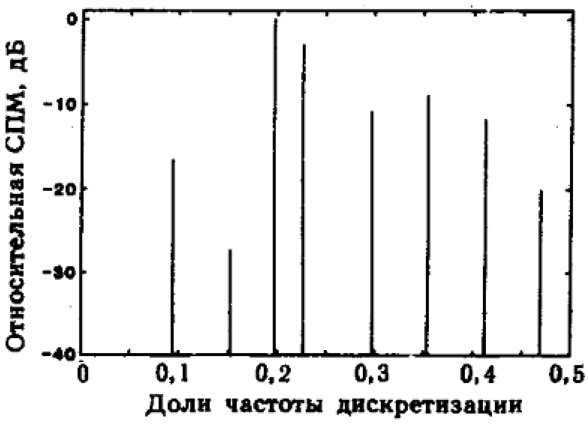


(g)

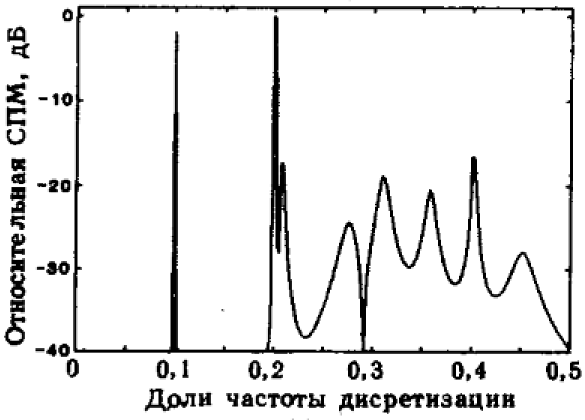


(h)

(g) СС оценка СПМ;
(h) АРСС-оценка СПМ на основе обобщенных уравнений Юла — Уокера;

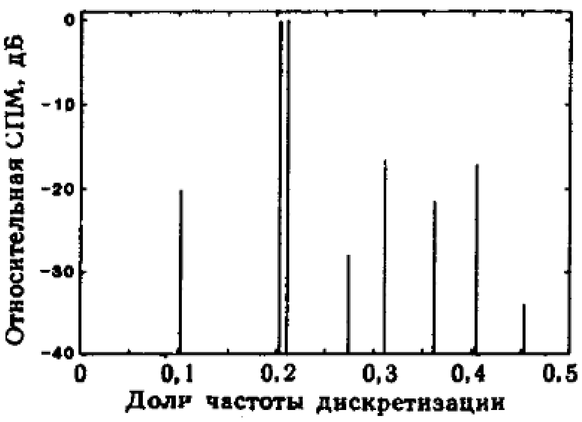


(i)

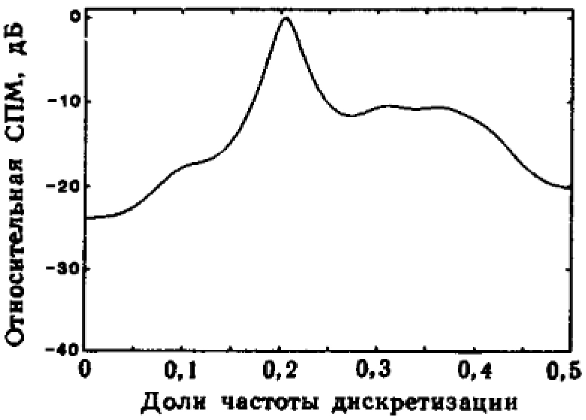


(j)

(i) СПМ на основе метода спектрального разложения Писаренко;
(j) энергетическая спектральная плотность Прони;



(k)



(l)

(к) частный вариант метода Прони на основе подхода Хильдебранда;
(l) СПМ Кейпона (метод максимального правдоподобия).